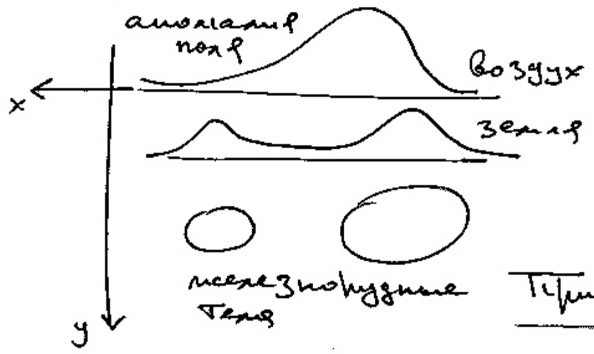
Лекция 6. Некорректные и обратные задачи теории потенциала

Задача продолжения гравитационного поля



Продолжение вниз поле лучше отражает аномальную плотность. Однако эта задача некорректна.

Пример Адамара (некорректная задача)

Задача Коши для уравнения Лапласа

$$u_{xx}+u_{yy}=0, \quad -\infty<x<\infty,\ y>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x) \quad -\infty<x<\infty,$$
$$u_y(x,0)=\psi(x), \quad -\infty<x<\infty,$$

Покажем, что эта задача неустойчива

Пусть $\bar\varphi(x)=\bar\psi(x)=0,\ -\infty<x<\infty \Rightarrow \bar u(x,y)\equiv 0, \quad |x|<\infty,\ y>0$

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{n}\sin nx, \quad \psi_n(x)=0$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi_n(x)-\bar\varphi(x)|=\frac{1}{n}\to 0, \quad n\to\infty$$

$$u_n(x,y)=\frac{1}{n}\sin nx\,\mathrm{ch}\,ny, \quad y=0 \quad u_n(x,y)\Big|_{y=0}=\varphi_n(x)$$

Для $u_n(x,y)$ выполн. нач. усл.

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ y\geq 0}}|u_n(x,y)-\bar u(x,y)|\to\infty$$ при $n\to\infty$, $x_n=\frac{\pi}{2n}$, $y=1$, будет стремление к ∞.

Задача на отрезке (начально-краевая задача для уравнения Лапласа)

$$u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<l, \quad y>0,$$
$$u(0,y)=u(l,y)=0, \quad y>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leq x\leq l,$$
$$u_y(x,0)=\psi(x), \quad 0\leq x\leq l.$$

Задача: найти $u(x,b)=f(x),\ 0\leq x\leq l$.

Это обратная к задаче Дирихле, т.к. φ, f и $0, 0$ явл. усл. Дирихле для ур-ния Лапласа.

Решение задачи Дирихле (прямой) находим с пом. метода разделения переменных

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi\;\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{l}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{l}b}\sin\frac{\pi n x}{l}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi\;\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{l}y}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{l}}\sin\frac{\pi n x}{l},$$

здесь $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi\;\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{l}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{l}b}\sin\frac{\pi n x}{l}=\Phi(x,y)$

– известная ф-ция

$$u_y(x,0)=\Phi_y(x,0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\,\frac{\pi n}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi\;\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{l}}\sin\frac{\pi n x}{l}=\psi(x)\quad(*)$$

$0\le x\le l$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n}{l^2}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi\;\frac{\sin\frac{\pi n x}{l}}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{l}}=\psi(x)-\Phi_y(x,0)\equiv\Psi(x)$$

Получ. ур-ие Фредгольма I рода отн. $f(x)$:

$$\int_0^l K(x,\xi)f(\xi)\,d\xi=\Psi(x),\quad 0\le x\le l$$

$$K(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n}{l^2\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{l}}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\sin\frac{\pi n x}{l},$$

это равномерно сх. ряд $\Rightarrow K(x,\xi)$ – непр., а инт. оператор вполне непрерывен, след-но задача неустойчива из $L_2[0,l]\longrightarrow L_2[0,l]$ и из $C[0,l]$ в $C[0,l]$.

Единственность реш. есть: $\Psi(x)\equiv0\Rightarrow f(x)\equiv0$ $x\in[0,l]$,

т.к. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{2\pi n}{l^2\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{l}}f_n}_{g_n}\sin\frac{\pi n x}{l}=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|^2<\infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}|g_n|^2=0\Rightarrow g_n=0\sim\frac{2\pi n}{l^2\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{l}}f_n=0\sim$$

$f_n=0\Leftrightarrow f(x)=0$. ч.т.д.

Обратные задачи теории потенциалов

$$v(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\, dx'\, dy'\, dz' -$$

Ньютонов потенциал. Если $v(x,y,z)$ известна в нек. обл. T: $T \cap \Omega = \varnothing$, то это рав-во явл. уравнением отн. $\rho(\cdot)$ в неизвестной обл. Ω.

Вопрос, можно ли одновр. определить $\rho(\cdot)$ и Ω

Рассм. задачу для шара $Ш_{0,a}$ $x^2+y^2+z^2 \le a^2$, и пусть $\rho = \rho\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, тогда

$$v(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$ В силу

сфер. симметрии $v = v(R)$, где $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\Rightarrow$

$$v(R) = \int_0^a\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho(r)\, r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}} =$$

$$= 2\pi \int_0^a\int_0^{\pi} \frac{\rho(r)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}} =$$

$\theta \to t$ $\quad t = \sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}$

$$\left|\frac{D(t,r)}{D(\theta,r)}\right| = \left|\begin{matrix} t_\theta & t_r \\ 0_{r_\theta} & 1_{r_r} \end{matrix}\right| = |t_\theta| = \frac{Rr\sin\theta}{t}; \qquad \left|\frac{D(\theta,r)}{D(t,r)}\right| = \frac{t}{Rr\sin\theta}$$

$$= 2\pi \int_0^a\int_{R-r}^{R+r} \frac{\rho(r)\, r^{\cancel{2}}\, \cancel{\sin\theta}}{\cancel{t}\, R\cancel{r}\,\cancel{\sin\theta}}\, \cancel{t}\, dt\, dr = 2\pi \int_0^a\int_{R-r}^{R+r} \frac{\rho(r)\, r}{R}\, dt\, dr =$$

$$= \frac{4\pi}{R}\int_0^a \rho(r)\, r^2\, dr$$

<u>Обратная задача N1</u>. Дан потенциал v. Найти ρ и $\partial\Omega\equiv\Sigma$.

Если $\rho(r)=\text{const}=\rho_0$, то

$$v\Big|_{\Sigma_R}=\frac{4\pi}{R}\,\frac{\rho_0 a^3}{3}=\frac{4\pi}{3}a^3\rho_0\,\frac{1}{R}=\frac{M}{R}.$$

В этом случае при $\rho_{0,1}a_1^3=\rho_{0,2}a_2^3$ имеем на Σ_R один потенциал — ед. реш. ОЗ нет

<u>Обратная задача N2</u>. Дан потенциал v и Σ.
Найти ρ.
Пусть a фиксировано и известно

$$\int_0^a\rho(r)r^2\,dr=\frac{v\big|_{\Sigma_R}R}{4\pi}=A=\text{const},\qquad v\big|_{\Sigma_R}=v(R).$$

Очевидно, что $\rho(r)$ опр. неединств. образом, например, $\exists\ \rho(r)=cr+d$, тогда

$$\int_0^{a=1}\rho(r)r^2\,dr=\frac{c}{4}+\frac{d}{3}=A,$$ и ед. нет.

<u>Обр. задача N3</u>. Дан потенц. v и ρ. Найти Σ.
Эта задача труднее чем N2, т.к. неизвестна ф-ция 2х переменных
<u>Постановка обратной задачи</u>: $\exists\ \Omega\subset Ш_{0,A}$ и $v(M)\big|_{M\in\Sigma_A}$ — известна
Опр. $\Sigma=\partial\Omega$, если $\rho(\cdot)$ известна ($\rho=\text{const}$)

<u>Теорема</u> (П.С. Новиков). Если Ω — звездное тело, то его форма опр. единственным образом ($\partial\Omega\in\bar{C}^1$).

Тело наз. звездным отн. т-ки M_0, если луч, проведенный из этой т-ки пересекает Σ в 1ой т-ке. В этом случае имеем ур-ние

$$u(x,y,z)\Big|_{M(x,y,z)\in\Sigma_A}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{\sigma(\varphi,\theta)}\frac{\rho_0r^2\sin\theta\,dr}{\sqrt{(x-r\cos\varphi\sin\theta)^2+(y-r\sin\varphi\sin\theta)^2+(z-r\cos\theta)^2}}\right]d\theta\,d\varphi$$

или $K\sigma=u\big|_{\Sigma_A}$ — нелинейное уравнение

Заметим, что если $u(M)$ изв. на Σ_A, то она изв. и вне Σ_A так

Лекция 7. Обратные задачи для уравнения колебаний.
Задачи об определении начальных условий

(1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$

(2) $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t > 0$

(3) $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$

(4) $u_t(x,0) = \psi(x)$,

Дано: $u(x,T) = g(x)$, $0 \leq x \leq l$

Найти начальные условия

ОЗ 1: Даны $g(x)$, $\psi(x)$, найти $\varphi(x)$

ОЗ 2: Даны $g(x)$, $\varphi(x)$, найти $\psi(x)$

ОЗ 1. Пусть для простоты $\psi(x) = 0$. Выпишем решение на основе метода Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin\frac{\pi n s}{l}\, ds \cos\frac{\pi n}{l} at \sin\frac{\pi n}{l} x$$

Ур-ние для ОЗ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin\frac{\pi n s}{l}\, ds \cos\frac{\pi n}{l} aT \sin\frac{\pi n}{l} x = g(x), \ 0 \leq x \leq l.$$

Это уравнение м/б записано в виде

$$A_T \varphi = g, \text{ где } A_T : L_2[0,l] \to L_2[0,l]$$

$$A_{\frac{2l}{a}} = E \Rightarrow \varphi = g \text{ — корректная задача}$$

Пусть $T = \frac{2p}{2q-1} \frac{l}{a} \Rightarrow \cos\frac{\pi n aT}{l} = \cos\frac{2pn\pi}{2q-1} \neq 0 \ \forall n$ при фикс. p, q, $p, q \in \mathbb{N}$

Докажем это (от противного): $\exists$ $\frac{2pn\pi}{2q-1} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ $\sim$

$4pn = (2k+1)(2q-1) \Rightarrow \cos\frac{2pn\pi}{2q-1} \neq 0 \ \forall n$ (чет, нечет, нечет)

$f(n) = \cos\frac{2pn\pi}{2q-1}$ — целочисленная ф-ция, периодическая

т.к. $f(n+2q-1) = f(n) \Rightarrow \left|\cos\frac{2\pi n p}{2q-1}\right| \geq c > 0 \ \forall n$

Если $g\in L_2[0,l]$, то $g=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(g, \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x\right)}_{g_n}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x$ и

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n^2<\infty \Longrightarrow$

1) реш. ОЗ1 существует и $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{g_n}{\cos\frac{\pi n a T_{pq}}{l}}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x$,

т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{g_n^2}{\cos^2\frac{\pi n a T_{pq}}{l}}\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{g_n^2}{c^2}\Rightarrow\exists$, единственность, устойчивость и $\|\varphi\|_{L_2}\le\frac{1}{c}\|g\|_{L_2}$

Пусть теперь $T_{pq}=\dfrac{(2q-1)l}{2pa}$ – задача некорректна

<u>Пример</u> неединственности $\cos\dfrac{\pi n a T_{pq}}{l}=\cos\dfrac{\pi n(2q-1)}{2p}\Big|_{n=p}=$

$=\cos\frac{\pi}{2}(2q-1)=0$

Тогда для $g(x)=0$ имеем $\varphi(x)=0$, $\varphi(x)=\sin\frac{\pi p}{l}x$

Почему для некоторых t оператор A_t определяет корректную, а для сколь угодно близких некорректную задачу? Ответ: оператор A_t не явл. непрерывным по t, т.е.

$\|A_{T_1}-A_{T_2}\|$ большая при $|T_1-T_2|$ маленьком, т.к.

если взять $T_1=t_0=\frac{2l}{a}$, а $T_2=t_{0k}=\frac{(4k-1)l}{2ka}\to t_0$ при $k\to\infty$,

то $A_{t_0}=E$ и

$$\|A_{t_{0k}}-A_{t_0}\|=\sup_{\|\varphi\|_{L_2[0,l]}\le 1}\|(A_{t_{0k}}-E)\varphi\|_{L_2[0,l]}=$$

$$=\sup_{\|\varphi\|_{L_2}\le 1}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2\left(\cos\frac{\pi(4k-1)n}{2k}-1\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Т.к. при $k=n$ $\cos\dfrac{\pi(4k-1)n}{2k}=0$, то $\|A_{t_{0k}}-A_{t_0}\|\ge 1$

ОЗ 2. $\exists\ \varphi(x)=0$.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \psi(s)\sin\frac{\pi n s}{l}\,ds\,\frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l}at\,\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$0\le x\le l,\ t\ge 0$

Уравнение для ОЗ при $t=T$

$$A_T\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds\,\frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l}aT\,\sin\frac{\pi n x}{l}=g(x)$$

или $A_T\psi=g$, g – изв., $\psi=?$

Единств. или неединств. зависит от $\sin\frac{\pi n a}{l}T$

За счет выбора $\frac{l}{\pi n a T}$ задача сводится к корр. или некорр.

Имеем $\psi_n=\dfrac{g_n}{\sin\frac{\pi n a T}{l}}\,\dfrac{\pi n a}{l}$.

Для существ. необх. сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n^2}{\left(\sin\frac{\pi n a T}{l}\right)^2}\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2.$$ Но такого $\exists$ для $\forall g\in L_2$ нет

Берем $g_n\sim\frac{1}{n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}g_n^2<\infty$, но $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n^2}{\left(\sin\frac{\pi n a T}{l}\right)^2}\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\ge$

$\ge\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2\frac{1}{n^2}=\infty$, т.о. реш. ОЗ 2 существует не для любой $g(x)\in L_2$.

Обратные коэффициентные задачи для ур-ний в частных производных.

Задача определения коэффициента в уравнении теплопроводности

(1) $u_t=k(t)u_{xx}$, $0<x<\pi$, $0<t\le T$, $k(t)>0$

(2) $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $0\le t\le T$

(3) $u(x,0)=\varphi(x)$, $0\le x\le\pi$

ОЗ: $k(t)$ неизвестна, Найти $k(t)$, если изв.

$$g(t)=u(x_0,t),\ t\in[0,T],\ x_0\in(0,l).$$

27_1 Единственности в ОЗ1 нет (для произв. T).
Это говорит о том, что задача определения $\varphi \in L_2[0,l]$ по $g = A_T\varphi$, $\varphi \in L_2[0,l]$ пост. плохо. Что должен сделать "чистый" математик и "математик-прикладник"? Первому — не решать, второму — поставить по-другому.

Рассм. частный случай $l=\pi$, $a=1$.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0<x<\pi \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, & 0\leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Дано: $g(x) = u(x,T)$, найти $\varphi(x)$.

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\varphi_n \cos nT}_{g_n} \sin nx, \quad \varphi_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\xi)\sin n\xi\, d\xi.$$

$\cos nT \cong 0$, что делать?

$nT = \frac{\pi}{2}(2k+1)+\ldots$, но $2nT = \pi(2k+1) \neq 0$

Пусть $f(x) = u(x,2T)$. Тогда

$$f_n = \varphi_n \cos 2nT = \varphi_n(-1+2\cos^2 nT) =$$
$$= -\varphi_n + 2g_n\cdot\cos nT \Longrightarrow$$

$$\varphi(x) = -f(x) + 2[A_T g](x) = -f(x) + 2A_T g(x),$$

где $[A_T\alpha](x) = \beta(x)$ переводит $\begin{cases} u(x,0) = \alpha(x), \\ u_t(x,0) = 0, \end{cases} \to \beta(x)$

Если $g(x) = \frac{1}{\tau}\int_T^{T+\tau} u(x,t)\,dt$, то задача усложнится, больше τ — плохо.

Лекция 8. Обратные коэффициентные задачи для уравнений в частных производных

Задача определения коэффициента в уравнении теплопроводности

$$
173 \begin{cases} u_t = k(t)\, u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad 0 < t \le T \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \pi, \quad k(t) > 0 \end{cases}
$$

ОЗ: Найти $k(t)$, если дана

$$g(t) = u(x_0,t), \quad t \in [0,T], \quad x_0 \in (0,\ell).$$

Решение ПЗ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \sin n\xi \, d\xi \, e^{-n^2 \int_0^t k(\tau)d\tau} \sin nx.$$

На самом деле $u(x,t;k)$ – зависит от k операторным образом. Положим $x = x_0$

$$u_t(x_0,t;k) = k(t)\, u_{xx}(x_0,t;k) = g'(t), \quad 0 \le t \le T, \Rightarrow$$

$$k(t) = \frac{g'(t)}{u_{xx}(x_0,t;k)} \equiv Ak \quad \text{или} \quad k = Ak$$

Докажем, что такое уравнение имеет единственное решение в малом. Наложим условия на известную функцию $\varphi(x)$; $\varphi_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\xi) \sin n\xi \, d\xi$

1) $|\varphi_n| \le \frac{c}{n^6}$ (выполнено, если φ дост. гладкая и производные на концах обращаются в 0)

2) $\varphi_n \sin n x_0 \ge 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ и $\exists\, m: \varphi_m \sin m x_0 > 0$.

$\varphi''(x) < 0$

3) усл. на $g(t)$:

$$g(t) \in C^1[0,T], \quad g'(t) < 0, \quad \forall t \in [0,T]$$

$$g(t) = u(x_0,t), \quad g(0) = \varphi(x_0)$$

Применим к ур. $k = Ak$ принцип сжимающих отображений. Используем пр-во $C[0,T_0]$, $T_0 \in [0,T]$

$$\mathcal{K} = \{k \in C[0,T_0], \; 0 \le k(t) \le k_0, \; \forall t \in [0,T_0]\},$$

k_0, T_0 – управляющие параметры

Нужно доказать, что

1) $A\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

$\forall k \in \mathcal{K}$ оператор определён, т.к., поскольку

$|\varphi_n| \le \frac{c}{n^6}$, ряд

$$u_{xx}(x_0, t; k) = -\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 e^{-n^2\int_0^t k(\tau)d\tau} \sin nx_0 < 0$$

сходится, общий член $\sim \frac{1}{n^4}$

$(Ak)(t)$ ~~непрерывен~~ not $\forall k \in \mathcal{K}$ (из этого непр-ра)

$0 \le Ak \le k_0 \quad \forall k \in \mathcal{K}$

Очевидно, что $(Ak)(t) > 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}$, т.к.

$$(Ak)(t) = \frac{g'(t)^{<0}}{u_{xx}(x_0, t; k)_{<0}} > 0.$$

Докажем, что $(Ak)(t) \le k_0 \ \forall k \in K$

$$(Ak)(t) = \frac{g'(t)}{u_{xx}(x_0,t;k)} \le \frac{\|g'(t)\|_{C[0,T_0]}}{\varphi_m m^2 e^{-m^2 k_0 T_0} \sin m x_0} \le k_0$$

при условии $$\frac{\|g'\|_{C[0,T_0]}}{\varphi_m m^2 \sin m x_0} \le e^{-m^2 k_0 T_0} k_0 \quad (1)_{\text{усл.}}$$

2) Условие сжатия $\|Ak_1 - Ak_2\|_{C[0,T_0]} \le$

$$\le \|g'\|_{C[0,T_0]} \max_{t\in[0,T_0]} \frac{|u_{xx}(x_0,t;k_1) - u_{xx}(x_0,t;k_2)|}{u_{xx}(x_0,t;k_1)\,u_{xx}(x_0,t;k_2)} \le$$

$$\le \|g'\|_{C[0,T_0]} \frac{1}{\varphi_m^2 m^4 (\sin m x_0)^2} \cdot e^{2m^2 k_0 T_0} \max_{t\in[0,T_0]} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \sin n x_0 \otimes$$

$$\otimes \left| e^{-n^2 \int_0^t k_1(\tau)d\tau} - e^{-n^2 \int_0^t k_2(\tau)d\tau} \right|,$$ и т.к. $|e^{-x} - e^{-y}| \le |x-y|$ по ф-ле конечных приращ. Лагранжа, то

$$\|Ak_1 - Ak_2\|_{C[0,T_0]} \le \frac{\|g'\|_{C[0,T_0]} e^{2m^2 k_0 T_0}}{\varphi_m^2 m^4 (\sin m x_0)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^4 \sin n x_0 \left| \int_0^{t \le T_0} (k_1(\tau) - k_2(\tau)) d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{\|g'\|_{C[0,T_0]} e^{2m^2 k_0 T_0}}{\varphi_m^2 m^4 (\sin m x_0)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n \sin n x_0) n^4 \, T_0 \, \|k_1 - k_2\|_{C[0,T_0]}$$

усл. сжатия: $$\frac{\|g'\|_{C[0,T_0]} e^{2m^2 k_0 T_0} \cdot T_0}{\varphi_m^2 m^4 \sin m x_0} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n \sin n x_0) n^4 < 1 \quad - (2)_{\text{усл.}}$$

ограничения на k_0, T_0. Полагая $k_0 T_0 = 1$ можно за счет выбора T_0 добиться выполнения (1) и (2), делая T_0 маленьким

Теорема доказана. Решение ОЗ сущ. и ед. в малом.

Условие $\varphi_n \sin n x_0 \ge 0$ означает, что все гармоники $\varphi_n \sin n x$ в т. $x = x_0$ складываются с одним знаком

<u>Теорема</u> (единственности). Пусть $\varphi(x)$ удовл. сформулир. ранее условиям. Тогда реш. ОЗ !

<u>Док-во</u>. $$u(x_0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(s)\sin ns\,ds\,\sin nx_0\,e^{-n^2\int_0^t k_i(\tau)d\tau}=g(t),$$ $i=1,2,\ 0\le t\le T.$

Предположим, что $k_1(t), k_2(t)$ – реш. ОЗ ($k_i(t)\in C[0,T]$, $k_i(t)>0$) $(i=1)-(i=2)\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin nx_0\Big[\underbrace{e^{-n^2\int_0^t k_1(\tau)d\tau}}_{=e^{-p_1}\ x_1}-\underbrace{e^{-n^2\int_0^t k_2(\tau)d\tau}}_{=e^{-p_2}\ x_2}\Big]=0,\quad 0\le t\le T$$

Ф-ла Лагранжа $f(p_1)-f(p_2)=\int_0^1 f'(p_2+\theta(p_1-p_2))d\theta(p_1-p_2)$

Применим ее для разности в $[\dots]\Rightarrow e^{-p_1}-e^{-p_2}=-\int_0^1 e^{-p_2-\theta(p_1-p_2)}d\theta(p_1-p_2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin nx_0\int_0^1 e^{-n^2\int_0^t k_2(\tau)d\tau-\theta\left(n^2\int_0^t k_1(\tau)d\tau-n^2\int_0^t k_2(\tau)d\tau\right)}d\theta\left(n^2\int_0^t(k_2(\tau)-k_1(\tau))d\tau\right)=0$$

$$-\Phi(t)\int_0^t[k_1(\tau)-k_2(\tau)]d\tau=0,\quad 0\le t\le T,\ \text{где}$$

$$\Phi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin nx_0\cdot n^2\int_0^1 e^{-n^2\int_0^t[k_2(\tau)+\theta(k_1(\tau)-k_2(\tau))]d\tau}d\theta$$

Если всюду $\Phi(t)\ne 0$, то $\int_0^t[k_1(\tau)-k_2(\tau)]d\tau=0\ \forall t\in[0,T]$

$\Rightarrow k_1(t)=k_2(t)\ \forall t\in[0,T]$. Это следует из усл. теоремы.

Запишем ОЗ в виде
$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-n^2\int_0^t k(\tau)d\tau}\sin nx_0=g(t)\quad\text{или}\quad Bk=g$$

Очевидно, что существ. $g'(t)\in C[0,T]$ яв. необх. условием разрешимости.

Для задачи $Bk=g$ не выполнены условия устойчивости из $C[0,T]$ в $C[0,T]$. Действит., рассм. $k_l(t)=k(t)+k_0\cos lt>0$, $k_0>0$. Тогда
$\|k_l(t)-k(t)\|_{C[0,T]}=k_0$ при $l\to\infty$, тогда как
$\|Bk_l-Bk\|\to 0$ при $l\to\infty$.

$$\|Bk_l - Bk\|_{C[0,T]} \to 0 \text{ при } l \to \infty.$$

Задача упрощается, если $\varphi(x) = \sin mx$.

Тогда $$e^{-m^2\int_0^t k(\tau)\,d\tau} \sin mx_0 = g(t)$$

$$-m^2 k(t)\, e^{-m^2\int_0^t k(\tau)\,d\tau} \sin mx_0 = g'(t) \Rightarrow$$

$$k(t) = -\frac{g'(t)}{m^2 g(t)} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g'(t)\,g(t) < 0 \\ g'(t) < 0 \end{array}\right\} \text{– необх. усл. разреш.}$$

$g(0) = \sin mx_0$

Лекция 7 Обратная задача Штурма-Лиувилля и ее связь с обратными задачами для УРЧП

(1) $$-y''(x,\lambda)+q(x)y(x,\lambda)=\lambda y(x,\lambda), \quad 0<x<\pi$$

(2) $$y(0,\lambda)\sin\alpha+y'(0,\lambda)\cos\alpha=0,$$

(3) $$y(\pi,\lambda)\sin\beta+y'(\pi,\lambda)\cos\beta=0, \quad 0\le\alpha,\beta\le\pi$$

(1)-(3) - задача Штурма-Лиувилля для уравнения Шредингера — найти с.ф. и с.зн. λ_n

$\{\lambda_n\}$ - с.зн. действительные,

$\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$

$y(x,\lambda_n)$ - с.ф. - нетривиальные решения. Они взаимно ортогон. Нормируем в $L_2[0,\pi]$; $y(x,\lambda_n)$ образуют ортонорм. базис.

ПЗ Ш.-Л. Дано $q(x)$. Найти $\{\lambda_n\}$, $\{y(x,\lambda_n)\}$

Вставить св-ва соб. зн. стр. 34.

ОЗ Ш.-Л. (N1) Дано $\{\lambda_n\}$. Найти $q(x)$ - решение этой задачи неединственно.

Добавим усл.

(4) $$y(\pi,\lambda)\sin\gamma+y'(\pi,\lambda)\cos\gamma=0, \quad 0\le\gamma\le\pi, \quad \gamma\ne\beta$$

Для задачи (1), (2), (4) - с. зн. $\{\mu_n\}$

ОЗ Ш.-Л. (N2) Даны $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $n=1,2,\ldots$ Найти $q(x)$

Задача имеет ед. решение

ОЗ Ш.-Л. (N3) Даны $\{\lambda_n\}$, изв., что $q(x)$: $q(x)=q(\pi-x)$ и гр. усл. симметричны, т.е. $\alpha=-\beta$. Тогда $q(x)$ восст. однозначно.

(1) $$u_t=u_{xx}-q(x)u, \quad 0<x<\pi, \quad t>0, \quad \boxed{q(x)\ge 0;} \quad q\not\equiv 0 \text{ или } q(x)>0$$

(2) $$u_x(0,t)=0, \quad t>0$$

(3) $$u_x(\pi,t)=\nu(t), \quad t>0, \qquad \nu(t)\in C^1(0,\infty);$$

(4) $$u(x,0)=0, \quad 0\le x\le\pi \qquad \nu(0)=0,$$

$$\nu(t)=0 \text{ при } t\ge T_0,$$

(1)–(4) – прямая задача

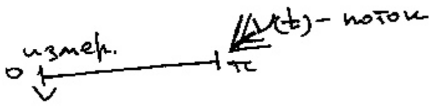
Обратная задача: $q(x)$ неизвестна. Доп. информ.

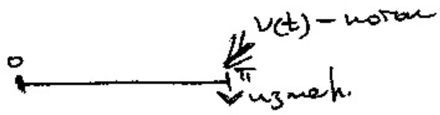
ОЗ 1. Дано $u(0,t)=h(t)$ $\Rightarrow$ найти $q(x)$

$\nu(t)$ – известно

ОЗ 2. Дано $u(\pi,t)=g(t)$ найти $q(x)$

$\nu(t)$ – известно

ОЗ 1 

ОЗ 2 

ОЗ 2 лучше чем ОЗ 1

Преобр. (1)–(4) с помощью интегр. преобр. Лапласа

$$v(x,p)=\int_0^\infty e^{-pt}u(x,t)\,dt\,,\quad \operatorname{Re} p \geqslant 0 \quad \left(\text{т.к. } \lambda_n>0, \text{ то } u(x,t)\to 0 \text{ при } t\to\infty \text{ как } e^{-\lambda_0 t}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-pt}u_t(x,t)\,dt = u(x,t)\cdot e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt}u(x,t)\,dt = p\,v(x,p)$$

$$p\,v(x,p)=v_{xx}(x,p)-q(x)\,v(x,p)$$

$$\begin{cases} v_{xx}(x,p)-q(x)\,v(x,p)=p\,v(x,p)\,, & 0<x<\pi \qquad (5)\\ v_x(0,p)=0 & \qquad (6)\\ v_x(\pi,p)=\tilde{\nu}(p) & \qquad (7)\end{cases}$$

Рассм. решение ур-ния (5) $w(x,p)$ с условием

$w(0,p)=1$, $w_x(0,p)=0$

$w(x,p)$ аналитическая по комплексной перем. p.

При $\operatorname{Re} p$ $v(x,p)$ и $w(x,p)$ лин. зависимы, т.к. явл. решением одного ОДУ $u(\ )'_x=0$ в т. $x=0$. Действ.

$$W(w,v)_{\text{опр. Вронского}} = \begin{vmatrix} w' & v' \\ w & v \end{vmatrix}_{x=0} = \underbrace{w'_x(0,p)}_{=0}v(0,p)-w(0,p)\underbrace{v'_x(0,p)}_{=0}=0,$$

но тогда $W(w,v)=0$ всюду на $[0,\pi]$, т.е. w и v лин. завис.

$v(x,p)=c(p)\,w(x,p)$ из усл. (7)

$c(p)\,w'_x(\pi,p)=\tilde{\nu}(p)$ или $c(p)=\dfrac{\tilde{\nu}(p)}{w'_x(\pi,p)}$, откуда

$$v(x,p)=\frac{\tilde{\nu}(p)\,w(x,p)}{w'_x(\pi,p)}$$ – это представление реш. ПЗ

Решение к О32.

Из доп. гр. усл. $u(\pi,t)=g(t)\Rightarrow$

$$v(\pi,p)=\int_0^\infty e^{-pt}g(t)\,dt=\tilde g(p).$$

Единственность реш. О32.

Пусть $\exists$ $q_1(x)$ и $q_2(x)$ такие, что $u_1(\pi,t)=u_2(\pi,t)=g(t)$

Им соответствуют v_1 и v_2. Тогда $v_1(\pi,p)=v_2(\pi,p)$

$$\frac{\tilde\nu(p)\,w_1(\pi,p)}{w'_{1,x}(\pi,p)}=\frac{\tilde\nu(p)\,w_2(\pi,p)}{w'_{2,x}(\pi,p)},\ \text{где}$$

$$\begin{cases} w''(x,p)-q(x)w(x,p)=p\,w(x,p)\\ w'(0,p)=0\\ w(0,p)=1\end{cases}$$

Пусть p_n нуль $w'(\pi,p)$, т.е. $w'(\pi,p_n)=0$, но

тогда $-p_n$ – с.з. Ш.-Л. с усл. $w'(0,p)=0$, $w'(\pi,p)=0$

Нули $w(\pi,p)$ $\hat p_n$, т.е. $w(\pi,\hat p_n)=0$ дают

$-\hat p_n$ – с.з. Ш.-Л. с усл. $w'(0,p)=0$, $w(\pi,p)=0$

Все нули $\hat p_n$ и p_n различны, иначе приходим к

задаче Коши с нач. усл. $w(\pi,p_n)=w'(\pi,p_n)=0\Rightarrow$

$w(x,p_n)\equiv 0$, но $w(0,p)=1$ $\forall p$.

Имеем $\dfrac{w_1(\pi,p)}{w'_{1,x}(\pi,p)}=\dfrac{w_2(\pi,p)}{w'_{2,x}(\pi,p)}\Rightarrow$

Все нули $w_1(\pi,p)$ = нулям $w_2(\pi,p)$ $\Leftrightarrow$
нули $w_1'(\pi,p)$ = нулям $w_2'(\pi,p)$

для q_1 Зад. Ш.-Л. $y'(0)=0$, $y(\pi)=0$ $-\lambda_n^{(1)}$ – нули числ.
$y'(0)=0$, $y'(\pi)=0$ $-\mu_n^{(1)}$ – нули зн.

для q_2 Зад. Ш.-Л. $y'(0)=0$, $y(\pi)=0$ $-\lambda_n^{(2)}$ – нули числ.
$y'(0)=0$, $y'(\pi)=0$ $-\mu_n^{(2)}$ – нули знам.

$\lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(2)}$ и $\mu_n^{(1)} = \mu_n^{2}$, $n = 1, 2, \ldots \Rightarrow$

$q_1(x) = q_2(x)$ – единственность

ОЗ 2 хорошая

ОЗ 1 знаем $v_1(0,p) = v_2(0,p)$ (т.к. $u_1(0,t) = u_2(0,t) = h(t)$)

$$\Rightarrow \frac{\tilde{v}(p)\, w_1(0,p)}{w_1'(\pi,p)} = \frac{\tilde{v}(p)\, w_2(0,p)}{w_2'(\pi,p)} \Rightarrow w_1'(\pi,p) = w_2'(\pi,p)$$

Инф. меньше, равны лишь спектры одной задачи Ш.-Л.,

ед. нет

Случай неизвестного источника тепла

Св-ва соб.знач. задачи

$$-y''(x,\lambda) + q(x)y(x,\lambda) = \lambda y(x,\lambda), \quad 0 < x < \pi, \quad q(x) \geq q_0$$

$$y'(0,\lambda) = y'(\pi,\lambda) = 0$$

1) С.з. λ_n действительны

2) $\lambda_n \to \infty$ $n \to \infty$, $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, с.з. – простые

3) $y_n(x,\lambda_n) = y(x,\lambda_n)$ – о.н.с., полная в $L_2[0,\pi]$

4) $\lambda_0 \geq q_0 = \min\limits_{x\in[0,\pi]} q(x)$.

Док-во (от противного). Предположим $\lambda_0 < q_0$, т.е. $\lambda_0 < q(x)$ $\forall x \in [0,\pi]$. Тогда $y''(x,\lambda_0) \equiv y_0''(x) = (q(x) - \lambda_0) y_0(x)$, где $q(x) - \lambda_0 > 0$. Т.к. $y_0(0) \neq 0$, то пусть $y_0(0) = a > 0$. Но тогда $y_0(x) > 0$ и $y_0'(x) > 0$ $\forall x \in [0,\pi]$, что противоречит $y_0'(\pi) = 0$ или $y_0(\pi) = 0$.

Пусть теперь для $v(t)$ вып. доп. усл. $v(t) > 0$ при $0 < t < T_0$ и $q(x) \geq 0$. Тогда в ОЗ (1)-(4) по $g(t)$ однозн. опр. $q(x)$ и $v(t)$

Док-во. $\tilde{v}(p) = \int_0^{T_0} v(t) e^{-pt}\, dt > 0$ для $\forall p$ – действительного

Из равенства $v_1(\pi,p) = v_2(\pi,p)$ имеем

$$\frac{\tilde{v}_1(p)\, w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \frac{\tilde{v}_2(p)\, w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}$$ при $\operatorname{Re} p \geq 0$, а в силу аналитичности всюду на компл. пл-ти $\mathbb{C}$

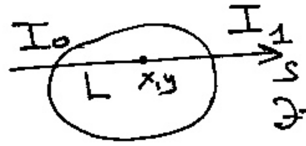
Нули ф-ций $w_j(\pi,p)$ и $w_j'(\pi,p)$ $= -\lambda_n$ и $= -\mu_n$ – с.з. задач Ш.-Л. Но $\lambda_n \geq 0$, $\mu_n \geq 0$, т.е. $w_j(\pi,p)$, $w_j'(\pi,p)$ обращ. в нуль только на п/п $\operatorname{Re} p \leq 0$, $v_j(p) \neq 0$ на действ. прямой $p \in \mathbb{R}$.

$\frac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \frac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}$, т.к. совпадают их нули и полюса, т.е. $q_1(x) = q_2(x)$ и $\Rightarrow \tilde{v}_1(p) = \tilde{v}_2(p)$.

~~Т.к. все нули $\tilde{v}_1(p)$ совпад. с нулями $\tilde{v}_2(p)$, т.е.~~ ~~см. на обороте~~

Лекция 10

Задачи компьютерной томографии

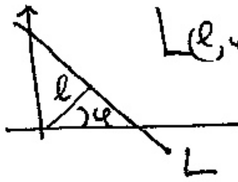


$$\frac{dI}{ds} = -\gamma\rho(x,y)\,I \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\gamma\rho(x,y)\Big|_{\substack{x(s)\\y(s)}} ds$$

Это феноменологический закон убывания интенсивности

$$\Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = \exp\Big\{-\gamma\int_{s_0}^{s_1}\rho(x,y)\,ds\Big\} \Rightarrow \int_L \rho(x,y)\,ds \quad \forall \text{ прямой } L$$

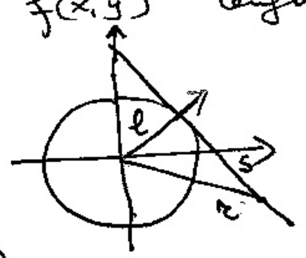
Рассм. матем. постановку



$L(l,\varphi):\ x\cos\varphi + y\sin\varphi = l,\ -\infty<l<\infty,\ 0\le\varphi\le 2\pi$

Опр. Отображение функции $f(x,y)$ вида

$$\int_{L(l,\varphi)} f(x,y)\,ds = u(l,\varphi)$$



наз. преобразованием Радона

Осн. задача — обратное преобразование Радона, т.е. по $u(l,\varphi)$ найти $f(x,y)$, $f\in C(\mathbb{R}^2)$.

Т.к. преобраз. Радона $\exists$ не $\forall f$, добавим убывание на ∞:

$$|f(x,y)| \le \frac{c}{(1+x^2+y^2)^{1+\varepsilon}}; \qquad \int_0^\infty |f(r)|\,dr \le \int_0^\infty \frac{c}{(1+r^2)^{1+\varepsilon}}\,dr < \infty$$

Рассм. параметрическое представление прямой $L(l,\varphi)$:

$$x(s) = l\cos\varphi - s\sin\varphi, \qquad -\infty<l<\infty,\quad \varphi\in[0,2\pi] \Rightarrow$$
$$y(s) = l\sin\varphi + s\cos\varphi; \qquad L(l,\varphi) = L(-l,\varphi+\pi).$$

Нет вз.-однозн. соответствия, поэтому либо $l\ge 0$, либо $\varphi\in[0,\pi]$

Запишем преобр. Радона для параметриз. прямой

$$u(l,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(l\cos\varphi - s\sin\varphi,\ l\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds.$$

Докажем, что интеграл сходится

$$|u(l,\varphi)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(l\cos\varphi - s\sin\varphi,\ l\sin\varphi + s\cos\varphi)|\,ds \le$$

$$x^2(s) + y^2(s) = l^2 + s^2$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C\,ds}{(1+l^2+s^2)^{1+\varepsilon}} < \infty.$$

Рассм. при $|l|\to\infty$.

$$|u(l,\varphi)| \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+l^2)^{1/2}\, ds/(1+l^2)^{1/2}}{(1+l^2)^{1+\varepsilon}\left(1+s^2/(1+l^2)\right)^{1+\varepsilon}} \le \frac{1}{(1+l^2)^{1/2+\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{1+\varepsilon}} \sim \frac{1}{l^{1+2\varepsilon}}.$$

$$|u(l,\varphi)| \le \frac{c_1}{l^{1+2\varepsilon}} \text{ при } |l| \ge 1.$$

Проекционная теорема

Определим пр. Фурье

$$\hat{f}(\omega_1,\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)}\, dx\, dy$$

<u>Теорема</u>. $\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = \hat{u}(\omega,\varphi)$.

<u>Док-во</u> (прямым вычислением)

$$\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i\omega(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}\, dx\, dy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{замена } (x,y)\to(l,s) \\ \left|\dfrac{D(x,y)}{D(l,s)}\right| = 1 \text{ — поворот} \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(l\cos\varphi - s\sin\varphi, l\sin\varphi + s\cos\varphi) \otimes$$

$$x = l\cos\varphi - s\sin\varphi, \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi = l$$
$$y = l\sin\varphi + s\cos\varphi,$$

$$\otimes\ e^{-i\omega l}\, ds\, dl = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(l,\varphi)\, e^{-i\omega l}\, dl}_{\text{сходится, т.к. } |u(l,\varphi)| \le \frac{c_1}{l^{1+2\varepsilon}} \text{ при } l\to\infty}$$

<u>Следствие</u>. 1. Единственность реш. задачи компьютерной томографии

$$Rf_1 = u,\quad Rf_2 = u \Rightarrow f_1 = f_2$$

Док-во. Преобр. Радона линейное, т.о. $\bar{f} = f_1 - f_2$ и $R\bar{f} = 0$

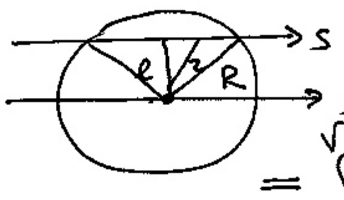
из проекц. теоремы $\hat{f} = 0 \Rightarrow \bar{f} = 0$.

2. Алгоритм решения задачи компьютерной томографии

$$\boxed{u(l,\varphi)} \xrightarrow{\text{БПФ}(\mathbb{R}^1)} \boxed{\hat{u}(\omega,\varphi)} \xrightarrow[\text{теорема}]{\text{проекц.}} \boxed{\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi)} \xrightarrow[\text{в декарт. к-ты}]{\text{пересчет}} \boxed{\hat{f}(\omega_1,\omega_2)} \xrightarrow{\text{БПФ}^{-1}(\mathbb{R}^2)} \boxed{f(x,y)}$$

Задача компьютерной томографии в случае радиальной симметрии

$$f(x,y)=\begin{cases} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), & \text{при } x^2+y^2 \le R^2 \\ 0, & x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$



$$u(l,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(l\cos\varphi - s\sin\varphi,\ l\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds =$$

$$=\int_{-\sqrt{R^2-l^2}}^{\sqrt{R^2-l^2}} f\left(\sqrt{l^2+s^2}\right)ds = 2\int_0^{\sqrt{R^2-l^2}} f\left(\sqrt{l^2+s^2}\right)ds \,\circledcirc$$

$$l^2+s^2=z^2 \Rightarrow s\,ds = z\,dz, \quad ds=\frac{z\,dz}{\sqrt{z^2-l^2}}$$

$$\circledcirc\ 2\int_l^R f(z)\frac{z\,dz}{\sqrt{z^2-l^2}} = u(l) \quad \text{— интегральное ур-ние}$$

I рода с перем. пределом и особ. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ в знамен. — уравнение Абеля. Особ. интегр.

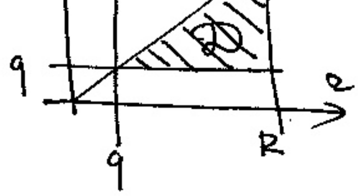
Общий вид ур-ние Абеля $\displaystyle\int_0^x \frac{f(s)\,ds}{(x-s)^\alpha} = u(x)$

Для уравнения Абеля можно получить явное решение

$$\int_q^R \frac{l\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}}\ \Bigg|\ 2\int_l^R \frac{f(z)\,z\,dz}{\sqrt{z^2-l^2}} = u(l)$$

$$\int_q^R \frac{l}{\sqrt{l^2-q^2}} \int_l^R \frac{2z\,f(z)\,dz}{\sqrt{z^2-l^2}}\,dl = \int_q^R \frac{l\,u(l)\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}}$$

Поменяем местами порядок интегр.



$$\iint_D \frac{2zl\,f(z)\,dz\,dl}{\sqrt{(l^2-q^2)(z^2-l^2)}} = \int_q^R 2z f(z) \int_q^z \frac{l\,dl}{\sqrt{(l^2-q^2)(z^2-l^2)}}\,dz$$

Введем Z: $l^2=(z^2-q^2)\frac{Z}{2}+(z^2+q^2)\frac{1}{2}$, замена $l \to Z$

$$2l\,dl=(z^2-q^2)\,dZ/2, \quad l^2-q^2=(z^2-q^2)(Z+1)/2,$$

$$z^2-l^2=(z^2-q^2)\left(\frac{1}{2}-\frac{Z}{2}\right), \quad \sqrt{(l^2-q^2)(z^2-l^2)}=\frac{z^2-q^2}{2}\sqrt{1-Z^2}$$

$$\Rightarrow \int_q^z \frac{l\,dl}{\sqrt{(l^2-q^2)(z^2-l^2)}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dz}{(1-z^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}\arcsin z\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

Т.о. $\frac{\pi}{2}\int_q^R 2z f(z)\,dz = \int_q^R \frac{l\,n(l)\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}} \Rightarrow$ дифф. по q, получим

$$q\,f(q) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dq}\int_q^R \frac{l\,n(l)\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}} \Rightarrow$$

(1) $$f(q) = -\frac{1}{\pi q}\frac{d}{dq}\int_q^R \frac{l\,n(l)\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}}.$$ Это выражение

определено не $\forall\, n(l)$. $n(R)=0$, но этого не достаточно; $n(R)=0$ необх. условие разрешимости ур-ния Абеля.
Предположим, что можно по частям взять интеграл

$$\int_q^R \frac{l\,n(l)}{\sqrt{l^2-q^2}}\,dl = \underbrace{\sqrt{l^2-q^2}\,n(l)\Big|_q^R}_{=0} - \int_q^R \sqrt{l^2-q^2}\,n'(l)\,dl.$$ Тогда

$$f(q) = +\frac{1}{\pi q}\frac{d}{dq}\int_q^R \sqrt{l^2-q^2}\,n'(l)\,dl = \frac{1}{\pi q}\int_q^R \frac{n'(l)(-q)}{\sqrt{l^2-q^2}}\,dl \Rightarrow$$

$$f(q) = -\frac{1}{\pi}\int_q^R \frac{n'(l)}{\sqrt{l^2-q^2}}\,dl \quad \text{и} \quad f(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^R n'(l)\frac{dl}{l} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dn(l)}{l}$$

Для того, чтобы (1) определяла непр. ф-цию, $n(l)$ должна удовлетворять усл. Гельдера с каким-либо показателем $1/2 \le \alpha \le 1$, т.е. $|n(l_1) - n(l_2)| \le c\,|l_1 - l_2|^\alpha$.

Если вместо $\bar{n}(l)$ имеем $\tilde{n}(l)$, то обратная задача может не иметь решения.

Лекция 11. Методы решения некорректных обратных задач (ОЗ) на компактных множествах

Рассм. ОЗ в ф-ме

(1) $Az = u$, Z, U - банаховы пр-ва, A - непрерывный оператор

$A: Z \to U$

Предп. $\exists! \bar{z}$: $A\bar{z} = \bar{u}$, $\bar{z}$ - точное решение, $\bar{u}$ - точн. правая часть, но $\bar{u}$ неизвестно, а даны u_δ и δ : $\|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta$.

Требуется построить приближ. решение z_δ : $\|z_\delta - \bar{z}\| \underset{\text{при } \delta \to 0}{\to} 0$.

Как строить решение $Az = \tilde{u}_\delta$, если задача некорректна.

Естественно потребовать, чтобы для приближ. решения z_δ выполнялось нер-во $\|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta$.

Рассм. мн-во $Z_\delta = \{z \mid \|Az - u_\delta\| \le \delta\}$. В силу некорректности задачи не обязательно, чтобы $Z_\delta \to \bar{z}$ при $\delta \to 0$.

Дополнительн. предположение — $\bar{z} \in M$, где M - компакт

Рассм. мн-во $Z_\delta^M = Z_\delta \cap M = \{z \mid z \in M, \|Az - u_\delta\| \le \delta\}$.

$\forall \delta > 0$ $Z_\delta^M \ne \emptyset$, т.к. $\bar{z} \in Z_\delta^M$, ибо $A\bar{z} = \bar{u}$, $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$.

Теорема. При $\delta \to 0$ $\sup\limits_{z \in Z_\delta^M} \|z - \bar{z}\| \to 0$.

Док-во. От противного $\exists\, \varepsilon > 0$ и $\{\delta_n\} \to 0$, $\{z_{\delta_n}\}$ такие, что $z_{\delta_n} \in Z_{\delta_n}^M$ и $\|z_{\delta_n} - \bar{z}\| \ge \varepsilon$ (выделим плохую послед-ть)

$z_{\delta_n} \in M$ - компакт, т.е. $\exists\, z_{n_p} \to z^* \in M$. Оператор A непрерывен $\Rightarrow Az_{n_p} \to Az^*$ при $\delta_{n_p} \to 0$. Но $z_{n_p} \in Z_{\delta_{n_p}}^M$

$\Rightarrow \|Az_{n_p} - u_{\delta_{n_p}}\| \le \delta_{n_p}$ и, т.к. $\|u_{\delta_{n_p}} - \bar{u}\| \le \delta_{n_p}$,

$\|Az^* - \bar{u}\| = 0 \Rightarrow Az^* = \bar{u}$ и $z^* = \bar{z}$. Т.о.

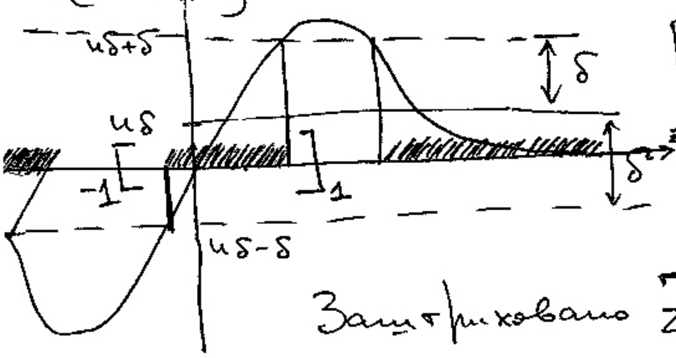
$\|z_{\delta_{n_p}} - \bar{z}\| \ge \varepsilon$, с др. стороны $\|z_{\delta_{n_p}} - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta_{n_p} \to 0$.

Теорема доказана.

Пример. $A: R^1 \to R^1$, $Az = \frac{z}{z^2+1}$.

Пусть $\bar{u} = 0$, $\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0 \Rightarrow \bar{z} = 0$ $\exists!$

$\{u_\delta, \delta\}$ $\|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta \sim \|u_\delta\| \le \delta$. Найти z_δ.



Возьмем $u_\delta = \frac{\delta}{2}$

$Z_\delta = \left\{ z \mid \left| \frac{z}{z^2+1} - \frac{\delta}{2} \right| \le \delta \right\}$, Z_δ - неограничен.

Заштриховано Z_δ: две полупрямые и отрезок.

Очевидно, что $z_\delta = 2/\delta \in Z_\delta$, т.к. $Az_\delta = \frac{2/\delta}{4+\delta^2}\delta^2 = \frac{2\delta}{4+\delta^2}$ и

$\frac{z_\delta}{1+z_\delta^2} - \frac{\delta}{2} = \delta\left(\frac{2}{4+\delta^2} - \frac{1}{2}\right) = \delta\left(\frac{-\delta^2}{4+\delta^2}\right)$ и $\|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta$, но

$\frac{2}{\delta} \not\to 0$ при $\delta \to 0$. Если же $M = [-1, 1]$, то

$Z_\delta^M = \left[\frac{-1+\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}, \frac{1-\sqrt{1-9\delta^2}}{3\delta}\right]$, и при дост. малых δ, $Z_\delta^M \to 0$ при $\delta \to 0$.

Метод квазирешений.

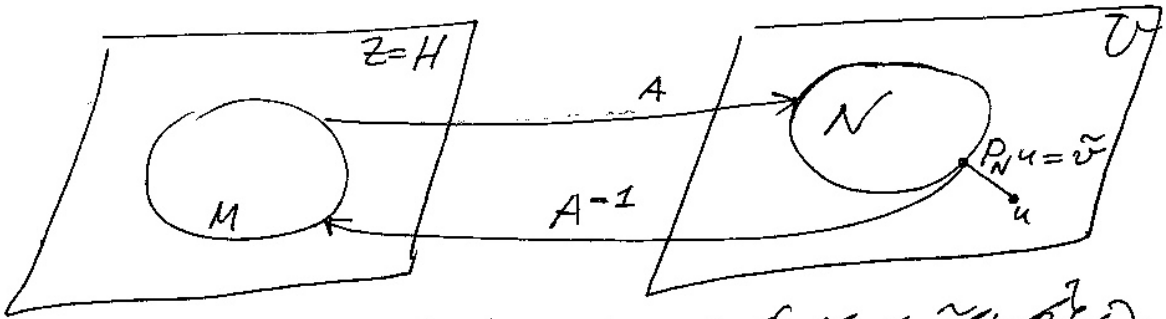
Опр. Эл-т $\tilde{z}$ наз. квазирешением $Az = u$ на M, если $\tilde{z} = \arg\inf\limits_{z \in M} \|Az - u\|$, т.е.

$\|A\tilde{z} - u\| = \inf\limits_{z \in M} \|Az - u\|$. Квазиреш. $\exists$ всегда, если A - непр., т.к. $f(z) = \|Az - u\|$ - непр. ф-л достигает точной нижней грани на компакте.

Если $\exists$ точное решение $\bar z$ и $\bar z \in M$, то оно явл. и квазирешением, т.к. $\bar z = \arg\inf\limits_{z\in M}\|Az-\bar u\|$, т.е. квази решение совпадает с решением, если $\bar u \in AM$.

Теорема. Пусть Z — банахово, а U — гильбертово (сепарабельное), $A: Z \to U$ — линейно непрерывный и $Az=0 \Rightarrow z=0$ ($\operatorname{Ker} A = 0$). Если M — выпуклый компакт в Z, то квазирешение $\exists!$ и устойчиво (т.е. задача определения квазирешения корректна).

1. Существует — всегда $\forall u$
2. Единственность — следствие однозначности оператора проектирования P_N, где $N = AM$, $\forall u$



$\tilde z = \arg\inf\limits_{z\in M}\|Az-u\| \cancel{= \arg\|Az-\tilde v\| = 0, \text{ где}}$, по $\inf\limits_{z\in M}\|Az-u\| = \inf\limits_{v\in N}\|v-u\| = \|\tilde v-u\|$.

$\tilde v = P_N u$, т.е. $\|\tilde v - u\| = \inf\limits_{v\in N}\|v-u\|$, т.е.

$A\tilde z = \tilde v$

Т.к. $\tilde v$ $\exists!$, то $\tilde z = A^{-1}\tilde v$ $\exists!$ по лемме о непр. A^{-1} (ядро оператора A нулевое)

Факт. Оператор проектирования на выпуклый компакт в H однозначно определен и непрерывен ($\|P_N\| \le 1$).

Рассмотрим применение метода квазирешений для решения уравнения с приближенно заданной правой частью.

Пусть $A: Z \to U$ — непр. оператор, действ. из банахова Z в банахово U. $A\bar z = \bar u$, $\bar z$ $\exists!$, $\bar u$ — неизвестно, дано u_δ: $\|u_\delta - \bar u\| \le \delta$.

Рассм. мн-во $\tilde{Z}_\delta^M = \{z \mid z = \arg\inf_{z\in M} \|Az - u_\delta\|\} = \operatorname{Arg}\inf_{z\in M} \|Az - u_\delta\|$

$\tilde{Z}_\delta^M$ – мн-во всех квазирешений.

Теорема. Пусть $\bar{z} \in M$. Тогда $\sup_{z\in \tilde{Z}_\delta^M} \|z - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Док-во (от противного). Пусть сходимости нет, т.е. $\exists\, \varepsilon > 0$, $\{\delta_n\} \to 0$ и посл. квазирешений $\{\tilde{z}_{\delta_n}\}$ такая, что $\tilde{z}_{\delta_n} \in \tilde{Z}_{\delta_n}^M$ и $\|\tilde{z}_{\delta_n} - \bar{z}\| \geq \varepsilon$.

Но $\tilde{z}_{\delta_n} \in M$ – компакт, т.е. $\exists$ подпосл. $\tilde{z}_{\delta_{n_p}} \to z^* \in M$.

$\|A\tilde{z}_{\delta_{n_p}} - u_{\delta_{n_p}}\| = \inf_{z\in M} \|Az - u_{\delta_{n_p}}\| \leq \|A\bar{z} - u_{\delta_{n_p}}\| = \|\bar{u} - u_{\delta_{n_p}}\| \leq \delta_{n_p} \Rightarrow$

$\|A\tilde{z}_{\delta_{n_p}} - u_{\delta_{n_p}}\| \leq \delta_{n_p}$. A – непрерывен $\Longrightarrow$

$\tilde{z}_{\delta_{n_p}} \to z^*$ при $p \to \infty \Rightarrow \|Az^* - \bar{u}\| = 0 \Rightarrow z^* = \bar{z}$ – противоречие: с одной стороны $\tilde{z}_{\delta_{n_p}} \to \bar{z}$, с другой $\|\tilde{z}_{\delta_{n_p}} - \bar{z}\| \geq \varepsilon$.

Теорема доказана.

Метод N1. $Z_\delta^M = \{z \mid z \in M, \|Az - u_\delta\| \leq \delta\}$ – необходимо знать δ для того чтобы знать, когда останавливать процесс минимизации

Метод N2 (квазирешений) $\tilde{Z}_\delta^M = \{z \in M \mid z = \arg\inf \|Az - u_\delta\|\} = \operatorname{Arg}\inf_{z\in M} \|Az - u_\delta\|$ δ знать не требуется, но минимизация проводится до конца.

Компакты.

① $\mathbb{R}^n$: ограниченность + замкнутость = компакт

② $C[a,b]$: дост. усл. компактности: равномерн. ограниченность и равностепенная непрерывность + замкнутость = компакт

Пример M в $C[a,b]$: $|f(x)| \leq C \quad \forall x \in [a,b]$,

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$. По т. Арцела
Липшиц-непрерывность
это мн-во – компакт.

Лекция 12. Метод регуляризации Тихонова. Случай линейного оператора.

Напомню некоторые сведения из функц. анализа

Опр. $z_n \xrightarrow{сл} z^*$ в H (гильб. пр-во), если $(z_n, v) \to (z^*, v)\ \forall v \in H$.

Свойства слабой сходимости:

1. Если $z_n \xrightarrow{сл} z^*$, то $\|z^*\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|z_n\|$

2. Если $z_n \xrightarrow{сл} z^*$ и A - вполне непр., то $Az_n \to Az^*$, где $A: H \to U$.

3. Если $\|z_n\| \leq C$, то $\exists \{z_{n_p}\} \subset \{z_n\}: z_{n_p} \xrightarrow{сл} z^* \in H$ (шар в H слабокомпактен).

4. Если $z_n \xrightarrow{сл} z^*$ и $\|z_n\| \to \|z^*\|$, то $z_n \to z^*$.

Пример. $\sin nx \xrightarrow{сл} 0$ в $L_2[0,\pi]$

$\|z_n(x)\|^2 = \frac{\pi}{2} \not\to 0$, $\int_0^\pi z_n(x) v(x)\,dx \to 0$ при $n \to \infty$.

Этим св-вом обладает $\forall$ о.н. базис в H.

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, Z, U - гильбертовы,

A - вп. непр. $A\bar z = \bar u$, $\bar z\ \exists!$

$\|\bar u - u_\delta\| \leq \delta$. Даны $\{u_\delta, \delta\}$, требуется построить $z_\delta \to \bar z$ при $\delta \to 0$.

Рассм. ф-л $M^\alpha[z,u] = \|Az-u\|^2_U + \alpha\|z\|^2_Z$, $\alpha > 0$.

u - $\forall$ фикс. эл-т из U

Теорема 1. Для любых $u \in U$ и $\alpha > 0$ существует единственный эл-т z_α, на котором дост. $\min_z M^\alpha[z,u]$ на Z, т.е. $\exists\ z_\alpha = \arg\inf_{z\in Z} M^\alpha[z,u]$.

Док-во. $M^\alpha[z,u] \geq 0\ \forall u, \alpha > 0 \Rightarrow m^* = \inf_{z\in Z} M^\alpha[z,u] \geq 0$.

Если $\exists \inf_z M^\alpha$, то $\exists$ минимизирующая пос-ть $\{z_n\}$, т.е. $M^\alpha[z_n,u] \to m^*_\alpha$, $n \to \infty$. Будем считать ее монотонной, т.е. $M^\alpha[z_n,u] \leq M^\alpha[z_{n-1},u]$. Тогда $M^\alpha[z_n,u] \leq M^\alpha[z_1,u] = C$.

След-но, $\|z_n\|^2 \le \frac{c}{\alpha}$, т.е. $\{z_n\}$ ограничена $\Rightarrow z_n$ слабокомпактна, т.е. $\exists \{z_{n_k}\} \xrightarrow{сл} z^* \in Z$.

По свойству слабой сходимости

$\|z^*\| \le \varliminf\limits_{k\to\infty} \|z_{n_k}\|$.

A - вполне непр., $z_{n_k} \to$ сл. $z^* \Rightarrow Az_{n_k} \to Az^*$, откуда

$M^\alpha[z^*, u] = m^*$. Действительно,

1) $\exists \forall \varepsilon>0$. Т.к. z_{n_k} - минимизирующая, то $M^\alpha[z_{n_k},u] \le m^* + \varepsilon/3$ $\forall k \ge N_1(\varepsilon)$

2) Т.к. $Az_{n_k}\to Az^*$, то $\exists N_2(\varepsilon): \|Az^*-u\|^2 \le \|Az_{n_k}-u\|^2+\varepsilon/3$ $\forall k\ge N_2(\varepsilon)$

3) Так как $\|z^*\|\le \varliminf \|z_{n_k}\|$, то $\exists N_3(\varepsilon): \alpha\|z^*\|^2 \le \alpha\|z_{n_k}\|^2+\varepsilon/3$. $\forall k \ge N_3(\varepsilon)$ $\Longrightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall k\ge N(\varepsilon)$ $M^\alpha[z^*,u] = \|Az^*-u\|^2+\alpha\|z^*\|^2 \le$
$N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$

$\le \|Az_{n_k}-u\|^2+\frac{\varepsilon}{3}+\alpha\|z_{n_k}\|^2+\frac{\varepsilon}{3} \le M^\alpha[z_{n_k},u]+\frac{2}{3}\varepsilon \le m^*+\varepsilon$

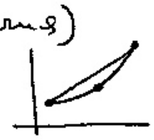
Т.о. $M^\alpha[z^*,u] \le m^*+\varepsilon = \inf\limits_{z\in Z} M^\alpha[z,u]+\varepsilon \Longrightarrow$

$M^\alpha[z^*,u]=m^*$ в силу произвольности ε.

<u>Замечание</u>. Нигде не использовалось, что оператор A - линейный.

Доказано существование точки $\min\limits_{z\in Z} M^\alpha[z,u]$.

<u>Единственность</u>. $M^\alpha[z,u]=\|Az-u\|^2+\alpha\|z\|^2$ - функционал сильно выпуклый, т.к. явл. суммой выпуклого и сильно выпуклого ф-лов, то точка min единственна (очевидно из противного)

<u>Опр.</u> Ф-л $\Phi(z)$ наз. сильно выпуклым, если $\exists c>0$: 

$\Phi(\varkappa z_1+(1-\varkappa)z_2) \le \varkappa\Phi(z_1)+(1-\varkappa)\Phi(z_2) - \varkappa(1-\varkappa)c\|z_1-z_2\|^2$

$\forall \varkappa\in[0,1]$ $\forall z_1,z_2\in Z$.

Т.к. $\|\varkappa z_1+(1-\varkappa)z_2\|^2 \le \varkappa^2\|z_1\|^2+(1-\varkappa)^2\|z_2\|^2+2\varkappa(1-\varkappa)(z_1,z_2)\le$

$\le \varkappa\|z_1\|^2+(1-\varkappa)\|z_2\|^2-\varkappa(1-\varkappa)\|z_1\|^2-\varkappa(1-\varkappa)\|z_2\|^2+2\varkappa(1-\varkappa)(z_1,z_2)\le$

$\le \varkappa\|z_1\|^2+(1-\varkappa)\|z_2\|^2-\varkappa(1-\varkappa)\|z_1-z_2\|^2$

Необходимое и достаточное условие минимума. Ур-ие Эйлера.

Получим уравнение для т-ки $\min\limits_{z\in Z} M^\alpha[z,u]$, т.е. необх. усл.
Докажем, что $M^\alpha[z,u]$ дифференцируем, т.е. главная часть приращения $M^\alpha[z,u]$ — линейный ф-л.

Рассм. $M^\alpha[z+h,u] - M^\alpha[z,u] = (A(z+h)-u, A(z+h)-u) +$

$$+\alpha(z+h, z+h) - (Az-u, Az-u) + \alpha(z,z) = \cancel{(Az-u, Az-u)} + (Ah, Ah) +$$

$$+(Ah, Az-u) + (Az-u, Ah) + \cancel{\alpha(z,z)} + \alpha(h,z) + \alpha(z,h) +$$

$$\alpha(h,h) - \cancel{(Az-u, Az-u)} - \cancel{\alpha(z,z)} = (Ah, Az-u) + (Az-u, Ah) + (Ah, Ah) +$$

$$+\alpha(h,z) + \alpha(z,h) + \alpha(h,h) = 2(Ah, Az-u) + 2\alpha(h,z) + (Ah, Ah) +$$

$$+\alpha(h,h) = 2(h, A^*(Az-u)) + 2\alpha(h,z) + (Ah, Ah) + \alpha(h,h) =$$

$$= \underbrace{2\left(A^*(Az-u) + \alpha z, h\right)}_{\text{линейный ф-л}} + O(\|h\|^2)$$

т.е. $M^\alpha[z,u]$ дифф. в $\forall$ т. $z \in Z$ и

$$\frac{\partial M^\alpha[z,u]}{\partial z} = \operatorname{grad} M^\alpha[z,u] = 2\left(A^*(Az-u) + \alpha z\right)$$

$$dM^\alpha[z,u] = \left(\operatorname{grad} M^\alpha[z,u], dz\right)$$

В т-ке min z^*

(1) $$(A^*A + \alpha E) z^* = A^* u$$ — урав. Эйлера —

<u>необходимое</u> условие min. Оно явл. и <u>достаточным</u>.

<u>Док-во</u> (от противного). Пусть $\tilde z$ — реш. (1). Тогда $M^\alpha[\tilde z, u] = m^*$. От противного $\Longrightarrow$

Пусть это неверно, т.е. $M^\alpha[\tilde z, u] > m^*$. Тогда $\exists\ z^* = \arg\inf\limits_{z\in Z} M^\alpha[z,u]$ и в силу необх. усл. z^* — реш. ур-ие (1), тогда $\tilde z$ и z^* — два реш. (1) $\Rightarrow z = \tilde z - z^*$ — реш. однородн. ур. Эйлера
т.е. $(A^*A + \alpha E) z = 0$, $z \neq 0$ $\Longrightarrow$

$$0 = (A^*A + \alpha E z, z) = (Az, Az) + \alpha(z,z) \geq \alpha \|z\|^2 > 0$$ — противоречие

Построение прибл. решения.

Теорема 2. $\rceil$ $\alpha = \alpha(\delta)$ такое, что $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta > 0$ и $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда

$$\| z_{\alpha(\delta)} - \bar z \| \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0, \text{ где}$$

$$z_{\alpha(\delta)} = \arg\inf_{z \in Z} \left\{ \|Az - u_\delta\|^2 + \alpha \|z\|^2 \right\}.$$

Док-во (от противного). $\rceil$ $\exists\, \varepsilon > 0$ и $\{\delta_n\} \to 0$, $\{z_{\alpha(\delta_n)}\}$ такие, что $\| z_{\alpha(\delta_n)} - \bar z \| \geq \varepsilon > 0$, где $z_{\alpha(\delta_n)} = \arg\inf_{z \in Z} M^{\alpha(\delta_n)}[z, u_{\delta_n}]$.

Имеем $M^{\alpha(\delta_n)}[z_{\alpha(\delta_n)}, u_{\delta_n}] \leq M^{\alpha(\delta_n)}[\bar z, u_{\delta_n}]$, т.е.

$$\| A z_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n} \|^2 + \alpha(\delta_n) \| z_{\alpha(\delta_n)} \|^2 \leq \| \overset{=\bar u}{A \bar z} - u_{\delta_n} \|^2 + \alpha(\delta_n) \| \bar z \|^2 \leq$$

$$\leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n) \| \bar z \|^2$$

конец лекции 2011г.

(1) $\alpha(\delta_n) \| z_{\alpha(\delta_n)} \|^2 \leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n) \| \bar z \|^2$

(2) $\| A z_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n} \|^2 \leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n) \| \bar z \|^2$.

Из (1) $\Rightarrow \| z_{\alpha(\delta_n)} \|^2 \leq \dfrac{\delta_n^2}{\alpha(\delta_n)} + \| \bar z \|^2 \leq C_1$, откуда следует, что

$\exists \{ z_{\alpha(\delta_{n_k})} \} \xrightarrow{сл} z^*$.

$$\| z^* \| \leq \underline{\lim} \| z_{\alpha(\delta_{n_k})} \| \leq \overline{\lim} \| z_{\alpha(\delta_{n_k})} \| \leq \| \bar z \|$$

Из (2) и того, что $z_{\alpha(\delta_{n_k})} \xrightarrow{сл} z^* \Rightarrow A z_{\alpha(\delta_{n_k})} \to A z^*$, т.к. A — вполне непрерывен. Но

$\| A z_{\alpha(\delta_{n_k})} - u_{\delta_{n_k}} \|^2 \leq \delta_{n_k}^2 + \alpha(\delta_{n_k}) \| \bar z \|^2$, откуда

$$\| A z_{\alpha(\delta_{n_k})} - \bar u \| \leq \| A z_{\alpha(\delta_{n_k})} - u_{\delta_{n_k}} \| + \overbrace{\| \bar u - u_{\delta_{n_k}} \|}^{\leq \delta_{n_k}} \to 0$$

т.е. $A z^* = \bar u$. Т.к. решение единственно, то $z^* = \bar z \Rightarrow$

$\| \bar z \| \leq \underline{\lim} \| z_{\alpha(\delta_{n_k})} \| \leq \overline{\lim} \| z_{\alpha(\delta_{n_k})} \| \leq \| \bar z \|$, след-но $\| z_{\alpha(\delta_{n_k})} \| \to \| \bar z \|$, $\delta_{n_k} \to 0$

и $z_{\alpha(\delta_{n_k})} \xrightarrow{сл} \bar z \Rightarrow z_{\alpha(\delta_{n_k})} \to \bar z$ в Z ...

Выбор параметра регуляризации по принципу невязки (линейный случай)

A – лин. вполне непр.

$A: Z \to U$, Z, U – гильбертовы

$Az = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow$ единств. решение.

Пусть $\overline{R(A)} = U$ (обл. значений оператора A плотна в U)

$Az = u$, $u \neq 0$, иначе $z = 0$

Лемма 1 (без док-ва) Если $u \neq 0$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $z_{\alpha_1} \neq z_{\alpha_2}$,

$$z_{\alpha_j} = \arg\inf_{Z} M^{\alpha_j}[z, u]$$

Док-во (от противного) Из необх. усл. экстремума

$$\begin{aligned} -\ &\alpha_1 z_{\alpha_1} + A^* A z_{\alpha_1} = A^* u \\ &\alpha_2 z_{\alpha_2} + A^* A z_{\alpha_2} = A^* u \end{aligned} \Rightarrow \text{ч. т. д.} \quad \Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \Rightarrow$$

$\Delta\alpha z_\alpha = 0 \Rightarrow z_\alpha = 0 \Rightarrow A^* u \underset{0}{=} (z, A^* u) = (Az, u) = 0 \ \forall z \in H$. Т.к. $\overline{R(A)} = U$, то $u = 0$.

$] \ z_\alpha = \arg\inf_{Z} M^\alpha[z, u]$. Введем обозначение

$M^\alpha[z_\alpha, u_\delta] = m(\alpha)$, $\varphi(\alpha) = \|Az_\alpha - u_\delta\|^2$, $\psi(\alpha) = \|z_\alpha\|^2 \Rightarrow$

$$m(\alpha) = \varphi(\alpha) + \alpha\psi(\alpha)$$

Лемма 2. Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то $m(\alpha_1) > m(\alpha_2)$,
$\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$,
$\psi(\alpha_1) < \psi(\alpha_2)$

Док-во. $] \ \alpha_1 > \alpha_2 \overset{?}{\Rightarrow} m(\alpha_1) > m(\alpha_2)$

① $m(\alpha_1) = M^{\alpha_1}[z_{\alpha_1}, u_\delta] > M^{\alpha_2}[z_{\alpha_1}, u_\delta] > M^{\alpha_2}[z_{\alpha_2}, u_\delta] = m(\alpha_2)$

③ $] \alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow \psi(\alpha_1) < \psi(\alpha_2)$

$\varphi(\alpha_1) + \alpha_1\psi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2) + \alpha_1\psi(\alpha_2) \sim M^{\alpha_1}[z_{\alpha_1}, u_\delta] < M^{\alpha_1}[z_{\alpha_2}, u_\delta]$

аналогично

$+\ \varphi(\alpha_2) + \alpha_2\psi(\alpha_2) < \varphi(\alpha_1) + \alpha_2\psi(\alpha_1) \sim M^{\alpha_2}[z_{\alpha_2}, u_\delta] < M^{\alpha_2}[z_{\alpha_1}, u_\delta]$

$(\alpha_1 - \alpha_2)\psi(\alpha_1) < (\alpha_1 - \alpha_2)\psi(\alpha_2)$, ч.т.д.

② $\alpha_1 > \alpha_2 \overset{?}{\Rightarrow} \varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$

Ясно, что $\varphi(\alpha_2) + \alpha_2\psi(\alpha_2) < \varphi(\alpha_1) + \alpha_2\psi(\alpha_1) \sim M^{\alpha_2}[z_{\alpha_2}, u_\delta] < M^{\alpha_2}[z_{\alpha_1}, u_\delta] \Rightarrow$

$\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1) < \alpha_2\underline{(\psi(\alpha_1) - \psi(\alpha_2))} < 0 \Rightarrow \varphi(\alpha_2) < \varphi(\alpha_1)$.

Лемма 3 (без док-ва) $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ непрерывны при $\alpha>0$.

Комментарий. z_α – решение уравнения $\alpha z_\alpha + A^*Az_\alpha = A^*u_\delta$

При $\alpha>0$ z_α непрерывно зависит от α

Лемма 4. $\lim\limits_{\alpha\to+0}\varphi(\alpha)=0$, $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\varphi(\alpha)=\|u_\delta\|^2$

Док-во. 1) $\lim\limits_{\alpha\to+0}\varphi(\alpha)=0$. $\overline{R(A)}=U \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists z_\varepsilon: \|Az_\varepsilon-u_\delta\|\le\varepsilon$, тогда

$$M^\alpha[z_\varepsilon,u_\delta]=\|Az_\varepsilon-u_\delta\|^2+\alpha\|z_\varepsilon\|^2\ge M^\alpha[z_\alpha,u_\delta]=\varphi(\alpha)+\alpha\psi(\alpha)$$

$$\varphi(\alpha)\le\|Az_\varepsilon-u_\delta\|^2+\alpha\|z_\varepsilon\|^2\le\varepsilon^2+\alpha\|z_\varepsilon\|^2$$

При $\alpha\to+0$ $\varphi(+0)\le\varepsilon^2$, ч.т.д.

2) $M^\alpha[z_\alpha,u_\delta]\le M^\alpha[0,u_\delta]$

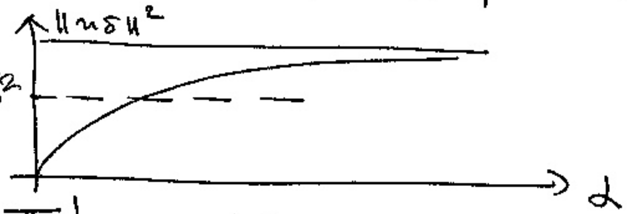
$$\varphi(\alpha)+\alpha\psi(\alpha)\le\|A0-u_\delta\|^2+\alpha\|0\|\Rightarrow$$

$\alpha\|z_\alpha\|^2\le\|u_\delta\|^2$, $\|z_\alpha\|\le\frac{\|u_\delta\|^2}{\alpha}\to0$ при $\alpha\to\infty$,

т.е. $\|z_\alpha\|\to0$ при $\alpha\to\infty$ $\Rightarrow$

$\varphi(\alpha)=\|Az_\alpha-u_\delta\|^2\to\|u_\delta\|^2$, ч.т.д.

Итак $\varphi(0)=0$, $\varphi(+\infty)=\|u_\delta\|^2$, $\varphi(\alpha)\uparrow$ и непр.



$\varphi(\alpha)=a$ будет иметь единственное решение.

Теорема. Пусть $\|u_\delta\|>\delta$, тогда уравнение

$$\varphi(\alpha)\equiv\|Az_\alpha-u_\delta\|^2=\delta^2,\ \text{где}\ z_\alpha=\arg\inf_{z\in Z}\{\|Az-u_\delta\|^2+\alpha\|z\|^2\}$$

имеет единственное решение $\alpha(\delta)$ и $\|z_{\alpha(\delta)}-\bar z\|\to0$ при $\delta\to0$.

$z_{\alpha(\delta)}$ можно рассматривать как приб. решение.

Конец лекции

Док-во. $\exists!$ корня $\varphi(\alpha)=\|Az_\alpha-u_\delta\|^2=\delta^2$ следует из св-в $\varphi(\alpha)$

Док-во сходимости (от противного).

$\exists\, \varepsilon > 0,\ \delta_n \to 0,\ z_{\alpha(\delta_n)}$ такие, что $\|z_{\alpha(\delta_n)} - \bar{z}\| \geq \varepsilon$.

Для $z_{\alpha(\delta_n)}$ имеем

$$M^{\alpha(\delta_n)}[z_{\alpha(\delta_n)}, u_{\delta_n}] = \|Az_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|z_{\alpha(\delta_n)}\|^2 \leq$$

$$\leq \|A\bar{z} - u_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{z}\|^2,$$

① $\|Az_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|^2 = \delta_n^2$ и $\|A\bar{z} - u_{\delta_n}\|^2 \leq \delta_n^2$

② $\|z_{\alpha(\delta_n)}\| \leq \|\bar{z}\|$, $\{z_{\alpha(\delta_n)}\}$ слабо компактна, т.к. ограничена,

$\Rightarrow \exists \{z_{\alpha(\delta_{n_p})}\} \xrightarrow{сл} z^*$. Тогда

$$\|z^*\| \leq \underline{\lim}\, \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \leq \overline{\lim}\, \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \leq \|\bar{z}\|.$$

Из ② $Az_{\alpha(\delta_{n_p})} \to Az^*$, т.к. A – вполне непр.

Из ① $\|Az^* - \bar{u}\| = 0$, т.е. $Az^* = A\bar{z}$, а т.к. реш. ур. $Az = \bar{u}$ единственно, то $z^* = \bar{z}$, и $\Rightarrow$

$$\|\bar{z}\| = \|z^*\| \leq \underline{\lim}\, \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \leq \overline{\lim}\, \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \leq \|\bar{z}\| \Rightarrow$$

$\|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \to \|\bar{z}\| = \|z^*\| \Rightarrow$ из слабой сх. и сх. норм $\Rightarrow$ сходимость,

т.е. $\|z_{\alpha(\delta_{n_p})} - \bar{z}\| \to 0$, противоречие.

Выбор по принципу невязки возможен только в линейном случае. В нелинейном случае невязка, вообще говоря, разрывна.

Метод регуляризации Тихонова для решения нелинейного операторного ур-ния

$Az=u$, $z\in Z$, $u\in U$, Z, U – банаховы пр-ва.

A – непрерывный из Z в U, $H\subset Z$ – H-гильбертово, компактно вложено в Z, т.е. шар $\|z\|_H\le d$ – компакт в Z.

Уравн. $Az=\bar u$ имеет единственное решение $\bar z\in H$.

Ф-л Тихонова $\|Az-u\|_U^2+\alpha\|z\|_H^2=M^\alpha[z,u]$

<u>Теорема 1</u>. (Существование z_α). Для любых $\alpha>0$ и $u\in U$ $\exists$

$$z^*=\arg\inf_{z\in H} M^\alpha[z,u],\quad z^*\in H.$$

<u>Док-во</u> аналогично док-ву Т.1 из предыд. темы с заменой сл. сход. в H на сход. в Z. Пусть $\{z_n\}\subset H$ – минимизир. послед. Т.к. $\alpha\|z_n\|_H^2\le\alpha\|z_1\|_H^2+\|Az_1-u\|^2=C$, то $\exists\{z_{n_p}\}\subset H$: $z_{n_p}\xrightarrow{Z}z^*$, $z^*\in Z$ (в силу компакт.). Докажем, что $z^*\in H$.

$$m^*=\inf_{z\in H}M^\alpha[z,u]=\lim_{p\to\infty}M^\alpha[z_{n_p},u]=\lim_{p\to\infty}\{\|Az_{n_p}-u\|^2+\alpha\|z_{n_p}\|_H^2\}=$$

$$=\|Az^*-u\|^2+\alpha\lim_{p\to\infty}\|z_{n_p}\|_H^2=\varphi^*+\alpha\psi^*.$$

Докажем, что из того, что $z_{n_p}\xrightarrow{Z}z^*$ и $\|z_{n_p}\|_H\to\psi^*$ при $p\to\infty$, следует, что $z_{n_p}\xrightarrow{H}z^*\in H$. Рассм.

$$\sigma_{mp}=\frac12(\underbrace{z_{n_p}}_{\to\psi^*}+\underbrace{z_{n_{p+m}}}_{\psi^*})\ \text{и}\ \rho_{mp}=\frac12(z_{n_p}-z_{n_{p+m}}),\quad \sigma_{mp}\xrightarrow{Z}z^*,\ \sigma_{mp}\text{ – минимизир.}$$

$$\|\sigma_{mp}\|_H^2=\frac14\|z_{n_p}\|_H^2+\frac14\|z_{n_{p+m}}\|_H^2+\frac12\underbrace{(z_{n_p},z_{n_{p+m}})_H}_{\to\psi^*/2}\to\psi^*$$

$$\|\rho_{mp}\|_H^2=\underbrace{\quad\downarrow\quad\ -\!\!-\ //\ -\!\!-\quad\downarrow\quad}_{\to\frac{\psi^*}{2}}-\frac12\underbrace{(z_{n_p},z_{n_{p+m}})_H}_{\to\psi^*/2}\to0$$

фундаментальная

В силу полноты H $z_{n_p}\xrightarrow{H}\check z\in H$. Но $z_{n_p}\xrightarrow{Z}z^*$, $\Rightarrow\check z=z^*\in H$.

<u>Теорема 2</u> (сходимость). Пусть $\alpha=\alpha(\delta)>0$ при $\delta>0$ такое, что $\alpha(\delta)\to0$ и $\delta^2/\alpha(\delta)\le C=const$. Тогда

$$\sup\|z_{\alpha(\delta)}-\bar z\|_Z\to0\quad\text{при }\delta\to0,\quad\text{где}$$

$$\mathcal{H}_{\alpha(\delta)} = \operatorname{Arg} \inf_{z \in \mathcal{H}} M^{\alpha(\delta)}[z, u_\delta]$$

↓ мн-во всех $z_{\alpha(\delta)} \in \mathcal{H}$, на которых достигается $\min\limits_{z \in \mathcal{H}} M^{\alpha(\delta)}[z, u]$.

$\sigma_{m_p} \to z^* \Rightarrow \|A\sigma_{m_p} - u\|^2 \to \varphi^* \Rightarrow \forall \varepsilon\ N(\varepsilon): p \geq N(\varepsilon)\ \|A\sigma_{m_p} - u\|^2 \leq \varphi^* + \frac{\varepsilon}{2}$

$M^\alpha[\sigma_{m_p}, u] \leq \varphi^* + \frac{\varepsilon}{2} + \alpha \cdot \frac{1}{2}\left(\|z_m\|^2_{\mathcal{H}} + \|z_{m_p}\|^2_{\mathcal{H}}\right) \leq \varphi^* + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\alpha}{2}\left(\psi^* + \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \psi^* + \frac{\varepsilon}{2\alpha}\right) \leq$

$\leq \varphi^* + \alpha\psi^* + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma_{m_p}$ — минимизир. $\Rightarrow \|\sigma_{m_p}\|^2_{\mathcal{H}} \to \psi^*$

$H_{\alpha(\delta)} = \operatorname{Arg}\inf\limits_{z\in H} M^{\alpha(\delta)}[z,u_\delta]$

↓ мн-во всех $z_{\alpha(\delta)}\in H$, на которых достигается $\min\limits_{z\in H} M^{\alpha(\delta)}[z,u]$

(Лекция 13) Применение метода регуляризации Тихонова
Лекция 14. для решения интегральных уравнений I рода

Рассм. линейное интегральное ур-ние Фредгольма I рода:

$$Az = \int_a^b K(x,s)z(s)\,ds = u(x), \quad c\le x\le d.$$

$Z=L_2[a,b]$, $U=L_2[c,d]$ — гильб. пр-ва

$\int_a^b\int_c^d |K(x,s)|^2\,dx\,ds<\infty$ — интегральный оператор вполне непрерывн. ⇒ задача некорректная

Для $\bar u$ $Az=\bar u$ реш. $\bar z$ ∃ и единственно, дано $\{u_\delta,\delta\}$: $\int_c^d |u_\delta(x)-\bar u(x)|^2\,dx\le\delta^2$. Выпишем ф-л Тихонова

$$M^\alpha[z,u_\delta] = \|Az-u_\delta\|^2+\alpha\|z\|^2 = \int_c^d\left[\int_a^b K(x,s)z(s)\,ds - u_\delta(x)\right]^2dx + \alpha\int_a^b z^2(s)\,ds \to \min_Z \Rightarrow z_{\alpha(\delta)}\to\bar z$$

Используем необх. и дост. усл. минимума — ур-ние Эйлера:

$$\alpha z + A^*Az = A^*u_\delta$$

$A^*v = \int_c^d K(x,s)v(x)\,dx$ по определению, т.к.

$$(A^*v,\varphi)_{L_2[a,b]} = (A\varphi,v)_{L_2[c,d]} \Leftrightarrow \int_c^d v(x)\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds\,dx = \int_a^b\varphi(s)\int_c^d K(x,s)v(x)\,dx.$$

Т.о. $\alpha z(t) + \int_c^d K(x,t)\int_a^b K(x,s)z(s)\,ds\,dx = \int_c^d K(x,t)u_\delta(x)\,dx$ или

(1) $\alpha z(t)+\int_a^b B(t,s)z(s)\,ds = \int_c^d K(x,t)u_\delta(x)\,dx$, где

$B(t,s)=\int_c^d K(x,s)K(x,t)\,dx$, причем $B(t,s)=B(s,t)$ — симметричная ф-ция.

Решение этого ур-ния (1) — инт. ур. Фредгольма II рода с
... ∃ и ! для любой правой части и $\forall\alpha>0$.

При соотв. выборе $\alpha = \alpha(\delta)$ решение $z_{\alpha(\delta)} \xrightarrow{L_2} \bar{z}$.

$$\begin{cases} \alpha(\delta) > 0 \\ \alpha(\delta) \to 0 \\ \dfrac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \to 0 \end{cases}$$

— важные условия. Если $\alpha(\delta) = \delta^2$, то сходимости не будет.

С практической т-ки зрения сходимость в L_2 оч. слаба.

Получим сходимость в более сильной метрике.

Предположим, что точное решение $\bar{z} \in W_2^1[a,b]$ — плоб-во, и $\exists$ $\bar{z}$ $\exists$ и!, $U \equiv L_2[c,d]$.

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \int_c^d \Big[\int_a^b K(x,s) z(s)\, ds - u_\delta(x) \Big]^2 dx + \alpha \underbrace{\int_a^b \big[z^2(s) + (z'(s))^2 \big] ds}_{\|\cdot\|^2_{W_2^1[a,b]}}$$

Ур-ие Эйлера: $\alpha z + A^* A z = A^* u_\delta$, $A: W_2^1[a,b] \to L_2[c,d]$

$\| z_{\alpha(\delta)} - \bar{z} \|_{W_2^1[a,b]} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Нелинейные интегральные уравнения I рода

$$Az = \int_a^b K(x, s, z(s))\, ds = u(x), \quad x \in [c,d]$$

$Z = C[a,b]$, $U = L_2[c,d]$, $H = W_2^1[a,b]$; $\bar{z} \in H$.

$H \Subset Z$, т.е. $\forall$ шар $\|z\|_{W_2^1[a,b]} \le d$ яв. компактом в $C[a,b]$.

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \|Az - u_\delta\|^2_U + \alpha \|z\|^2_H = \int_c^d \Big[\int_a^b K(x,s,z(s))\, ds - u_\delta(x) \Big]^2 dx + \alpha \int_a^b \big((z(s))^2 + (z'(s))^2 \big) ds,$$

$\alpha = \alpha(\delta) > 0$, $\alpha(\delta) \to 0$, $\dfrac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \le C$

$\| z_{\alpha(\delta)} - \bar{z} \|_{C[a,b]} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Сходимость получаем только в $C[a,b]$;

$\alpha(\delta) = C\delta^2$, как выбрать C, есть проблема выбора

Лекция 14. Сведения из функционального анализа

$A: Z \to U$, Z, U — гильбертовы пр-ва

$B: Z \to Z$, Z — гильберт.

B — вполне непр. самосопряженный оператор.

Теорема. Пусть $\ker B = 0$. Опер. B имеет счетную послед. собств. значений и собств. эл-тов $\{\lambda_k, \varphi_k\}$; φ_k образуют о.н. базис в Z

т.е. $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (z, \varphi_k)\varphi_k$ и $Bz = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (z, \varphi_k)\lambda_k \varphi_k$.

Т.о. $\|z - \sum\limits_{k=1}^{N} (z, \varphi_k)\varphi_k\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ и

$\|z\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (z, \varphi_k)^2$, $\{\varphi_k\}$ — о.н.с.-базис. (р-во Парсеваля)

Итерационный метод решения операторных ур-ний I рода.

$Az = u$, Z, U — гильб., A — вполне непр.

$\ker A = 0$, вместо $\bar{u}$ даны $\{u_\delta, \delta\}$: $\|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta$,

найти z_δ: $\|z_\delta - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

$Az = u$, $A^*Az = A^*u \Rightarrow 0 = \mu A^*u - \mu A^*Az$

Рассм. итерацион. процесс

$$z_{n+1} = z_n + \mu A^*u - \mu A^*Az_n, \quad z_0 = \mu A^*u, \quad n = 1, 2, \dots$$

Покажем, что $z_n = R_n u$, где $R_n = \mu \sum\limits_{k=0}^{n} (E - \mu A^*A)^k A^*$. Применим метод матем. индукции.

$z_0 = R_0 u = \mu A^*u$ — верно.

Пусть верно для n. Для $n+1$ имеем

$$z_{n+1} = (E - \mu A^*A)z_n + \mu A^*u = \mu A^*u + (E - \mu A^*A)\mu \sum_{k=0}^{n} (E - \mu A^*A)^k A^*u =$$
$$= \mu A^*u + \mu \sum_{k=0}^{n} (E - \mu A^*A)^{k+1} A^*u = \mu A^*u + \mu \sum_{k=1}^{n+1} (E - \mu A^*A)^k A^*u =$$
$$= \mu \sum_{k=0}^{n+1} (E - \mu A^*A)^k A^*u = R_{n+1}u.$$

Теорема. Пусть $0 < \mu < \dfrac{2}{\|A^*A\|}$, а целочисленная ф-ция $n(\delta)$ такова, что $n(\delta) \to \infty$, $\delta n(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда

$$\|R_{n(\delta)}u_\delta - \bar{z}\| \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Док-во. $\|R_{n(\delta)}u_\delta - \bar{z}\| \le \|R_{n(\delta)}u_\delta - R_{n(\delta)}\bar{u} + R_{n(\delta)}\bar{u} - \bar{z}\| \le$

$$\le \underbrace{\|R_{n(\delta)}(u_\delta - \bar{u})\|}_{①} + \underbrace{\|R_{n(\delta)}\bar{u} - \bar{z}\|}_{②}$$

① $\|R_{n(\delta)}(u_\delta-\bar u)\| \le \|R_{n(\delta)}\|\,\|u_\delta-\bar u\| \le \|R_{n(\delta)}\|\,\delta$.

Оценим норму $R_{n(\delta)}$, $R_n=\mu\sum\limits_{k=0}^{n}(E-\mu A^*A)^k A^*$

Возьмем О.Н.Б. для A^*A из собств. эл-тов:

$A^*A\varphi_i=\lambda_i\varphi_i \Rightarrow$

$\lambda_i=(\lambda_i\varphi_i,\varphi_i)=(A^*A\varphi_i,\varphi_i)\le\|A^*A\|\,\|\varphi_i\|^2=\|A^*A\|$, т.е. ($\|\varphi_i\|=1$)

$0<\lambda_i\le\|A^*A\|$ и $|1-\mu\lambda_i|<1$, если $\mu\in\left(0,\frac{2}{\|A^*A\|}\right)$

$\|R_n\|=\|\mu\sum\limits_{k=0}^{n}(E-\mu A^*A)^kA^*\|\le\mu\sum\limits_{k=0}^{n}\|E-\mu A^*A\|^k\|A^*\|$,

т.е. $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$

$\|(E-\mu A^*A)\psi\|^2=\|(E-\mu A^*A)\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\psi,\varphi_i)\varphi_i\|^2=$

$=\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\psi,\varphi_i)(1-\mu\lambda_i)\varphi_i\|^2=$ (нав-во Парсеваля) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\psi,\varphi_i)^2(1-\mu\lambda_i)^2\le\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\psi,\varphi_i)^2=\|\psi\|^2$

$\Rightarrow$ $\|(E-\mu A^*A)\psi\|^2\le\|\psi\|^2\quad\forall\psi\Rightarrow$

$\|E-\mu A^*A\|\le1$ $\quad\|E-\mu A^*A\|=\max\limits_{i\ge1}|1-\mu\lambda_i|<1$

по словам

$\|R_n\|\le\mu\sum\limits_{k=0}^{n}\|E-\mu A^*A\|^k\|A^*\|\le\mu\|A^*\|\sum\limits_{k=0}^{n}1=\mu\|A^*\|(n+1)$

② $\|R_{n(\delta)}\bar u-\bar z\|\le$?

$R_{n(\delta)}\bar u-\bar z=R_{n(\delta)}A\bar z-\bar z=\mu\sum\limits_{k=0}^{n(\delta)}(E-\mu A^*A)^kA^*A\bar z-\bar z=$

$\bar z=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_i)\varphi_i$

$=\mu\sum\limits_{k=0}^{n(\delta)}(E-\mu A^*A)^kA^*A\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_i)\varphi_i-\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_i)\varphi_i=$

$=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_i)\mu\sum\limits_{k=0}^{n(\delta)}(E-\mu A^*A)^kA^*A\varphi_i-\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_i)\varphi_i=$

$=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_i)\mu\sum\limits_{k=0}^{n(\delta)}\underbrace{(1-\mu\lambda_i)}_{q}{}^k\lambda_i\varphi_i-\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_i)\varphi_i=$ $\quad S=\sum\limits_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_i)\frac{1-(1-\mu\lambda_i)^{n(\delta)+1}}{\underbrace{1-(1-\mu\lambda_i)}_{=\mu\lambda_i}}\cancel{\mu\lambda_i}\varphi_i-\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_i)\varphi_i=$

$=-\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-\mu\lambda_i)^{n(\delta)+1}(\bar z,\varphi_i)\varphi_i\Rightarrow$

$R_{n(\delta)}\bar u-\bar z=-\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-\mu\lambda_i)^{n(\delta)+1}(\bar z,\varphi_i)\varphi_i$. Докажем, что $\|R_n\bar u-\bar z\|\to0$

$$\|R_n\bar u - \bar z\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(1-\mu\lambda_i)^{2(n+1)}(\bar z,\varphi_i)^2 < \varepsilon$$

$\|\bar z\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_i)^2 < \infty$, то $\exists\ N(\varepsilon):\ \sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{\infty}(\bar z,\varphi_i)^2 \le \frac{\varepsilon}{2}$

$$\|R_n\bar u - \bar z\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(1-\mu\lambda_i)^{2(n+1)}(\bar z,\varphi_i)^2 \le \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} + \sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{\infty}(1-\mu\lambda_i)^{2(n+1)}(\bar z,\varphi_i)^2$$

Считая, что базис упорядочен, т.е. $|1-\mu\lambda_i|\le\alpha<1$

$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots>0$ имеем $(1-\mu\lambda_i)\nearrow$, т.е.

$-1<-\alpha\le 1-\mu\lambda_i\le\alpha<1$, $1\le i\le N(\varepsilon)$, $\alpha^n\to 0$, $n\to\infty$

$|1-\mu\lambda_i|\le\alpha<1$

и $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}(1-\mu\lambda_i)^{2(n+1)}(\bar z,\varphi_i)^2 \le \frac{\varepsilon}{2}$ при дост. большом $n=n_1(\varepsilon)$

Т.о., $\|R_n\bar u - \bar z\| = \beta(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Окончательно,

$$\|R_{n(\delta)}u_\delta - \bar z\| \le \mu\|A^*\|(n(\delta)+1)\delta + \beta(n(\delta)) \to 0$$ при $\delta\to 0$ и $n(\delta)\to\infty$ таких, что $n(\delta)\cdot\delta\to 0$.

$z_{n+1} = z_n + \mu(A^*u_\delta - A^*Az_n)$, $z_{n(\delta)}\to\bar z$

$n(\delta)$ можно выбирать по невязке

$\|Az_n - u_\delta\|\le q\delta$, $q>1$.

Лекция 15. <u>Проекционный метод решения уравнений I рода</u>

$z=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k$ — ищем решение в виде ряда по изв. системе ф-ций с неизв. коэфф.

В качестве $\{\varphi_k\}$ возьмем упорядоченный собств. базис опер. A^*A

$\lambda_{k+1}\le\lambda_k$, $\lambda_k>0$, $\lambda_k\to 0$, $\{\varphi_k\}$ — о.н.б.

Рассм. $\hat\psi_k = A\varphi_k\in U$, $\varphi_k\in Z$, Z, U — гильбертовы

$$(\hat\psi_k,\hat\psi_m) = (A\varphi_k, A\varphi_m) = (\varphi_k, A^*A\varphi_m) = \lambda_m(\varphi_k,\varphi_m) = \lambda_k\delta_{km}$$

Нормируем базис $\{\hat\psi_k\}$: $\psi_k = \frac{\hat\psi_k}{\|\hat\psi_k\|} = \frac{\hat\psi_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ — онб в U

исп. это условие

Считаем, что $A: Z\to U$ — вполне непр., $\overline{R(A)} = U$.

Решим ур-ие в базисе

$\bar z = \sum_{k=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_k)\varphi_k$, $\bar u = \sum_{k=1}^{\infty}(\bar u,\psi_k)\psi_k$

$$A\sum_{k=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_k)\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty}(\bar u,\psi_k)\psi_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_k)A\varphi_k=\sum_{k=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_k)\hat\varphi_k=\sum_{k=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_k)\sqrt{\lambda_k}\,\psi_k, \text{ откуда}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\bar z,\varphi_k)\sqrt{\lambda_k}\,\psi_k=\sum_{k=1}^{\infty}(\bar u,\psi_k)\psi_k$$

$$(\bar z,\varphi_k)\sqrt{\lambda_k}=(\bar u,\psi_k) \text{ или } (\bar z,\varphi_k)=\frac{(\bar u,\psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Т.о. найдено точное решение

$$\bar z=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\bar u,\psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k=A^{-1}\bar u \quad \text{для } u\in R(A)$$

Если $u\notin R(A)$, то ряд не сходится, т.к. задача некорректна, надо строить прибл. решение по-другому.

Рассм. $R_n: U\to Z$

$$R_n u=\sum_{k=1}^{n}\frac{(u,\psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k.$$ R_n определен и непрерывен на всем U. Докажем, что

$$\|R_{n(\delta)}u_\delta-\bar z\|\to 0 \text{ при } \delta\to 0$$

$$\|R_{n(\delta)}u_\delta-\bar z\|=\|R_{n(\delta)}u_\delta-R_n\bar u+R_n\bar u-\bar z\|\le$$

$$\le\|\underset{①}{R_n(u_\delta-\bar u)}\|+\|\underset{②}{R_n\bar u-\bar z}\|$$

① $\|R_n(u_\delta-\bar u)\|\le\|R_n\|\,\|u_\delta-\bar u\|\le\|R_n\|\delta$

$$\|R_n w\|^2=\Big\|\sum_{k=1}^{n}\frac{(w,\psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k\Big\|^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{(w,\psi_k)^2}{\lambda_k}\le\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\psi_k,w)^2\le\frac{\|w\|^2}{\lambda_n}$$

$$\|R_n w\|^2\le\frac{\|w\|^2}{\lambda_n} \Longrightarrow \|R_n\|\le\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \qquad 0<\lambda_n\le\lambda_k\le\ldots\le\lambda_1$$

② Докажем, что $\|R_n\bar u-\bar z\|\to 0$ при $n\to\infty$

$$\|R_n\bar u-\bar z\|^2=\|R_nA\bar z-\bar z\|^2=\Big\|\sum_{k=1}^{n}\frac{(A\bar z,\psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\bar u,\psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k\Big\|^2=$$

$$=\Big\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\bar u,\psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k\Big\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}(\bar z,\varphi_k)^2\to 0 \text{ при } n\to\infty$$

$\|R_n u_\delta-\bar z\|\le\|R_n\|\delta+\|R_n\bar u-\bar z\|=\|R_n\|\delta+\beta(n)$, где $\beta(n)\to 0$ при $n\to\infty$

<u>Теорема</u>. Если целочисленная функция $n(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$ и такова, что $\delta/\sqrt{\lambda_{n(\delta)}}\to 0$, то $\|R_{n(\delta)}u_\delta-\bar z\|\to 0$ при $\delta\to 0$.

Док-во. $\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z}\| \leq R_{n(\delta)} \delta + \beta(n(\delta)) \leq$

$\leq \dfrac{\delta}{\sqrt{\alpha_{n(\delta)}}} + \beta(n(\delta)) \to 0$ при $\delta \to 0$.

$\alpha_{n(\delta)} \to 0$, но не слишком быстро. Чем более гладкое $\bar{z}$, тем быстрее $\alpha_n \to 0$.

Теорема. Если неотрицательная ф-ция $n(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$ такова, что $\dfrac{\delta}{\sqrt{\lambda_{n(\delta)}}} \to 0$, то $\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Док-во. $\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z}\| \le \|R_{n(\delta)}\| \cdot \delta + \beta(n(\delta)) \le$

$$\le \frac{\delta}{\sqrt{\lambda_{n(\delta)}}} + \beta(n(\delta)) \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

$\lambda_{n(\delta)} \to 0$, но не слишком быстро. Чем более гладкие ядра, тем быстрее $\lambda_n \to 0$.

Метод квазиобращения

Рассм. задачу теплопроводности с обратным течением времени

Прямая задача

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \le T$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi$$

Обратная задача. Дано: $u(x,T) = g(x)$

Найти: $\varphi(x) = u(x,0)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 t} \sin nx, \quad \varphi_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(s) \sin ns \, ds.$$

Метод Фурье для обратной задачи

$$u(x, T-\tau) = \tilde{u}(x,\tau)$$

$$(1)\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \ 0 \le t \le T \\ u(x,T) = g(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ \tau = T - t \Rightarrow \end{cases} \longrightarrow (2)\begin{cases} \tilde{u}_\tau = -\tilde{u}_{xx}, & 0 \le \tau \le T, \ 0 < x < \pi \\ \tilde{u}(0,\tau) = \tilde{u}(\pi,\tau) = 0, & 0 \le \tau \le T \\ \tilde{u}(x,0) = g(x), & 0 \le x \le \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\tilde{u}(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2 \tau} \sin nx, \quad g_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(s) \sin ns \, ds$$

K — оператор прямой задачи

$K\varphi = g \sim K\varphi = u(x,T)$

Для $\bar{g}$ есть точное решение $K\bar{\varphi} = \bar{g}$, $\|\bar{g} - g_\delta\| \le \delta$

Оператор K – вполне непр. из $L_2 \to L_2[0,\pi]$.

$$K^{-1} g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2 T} \sin nx, \quad K^{-1} \text{ определен не } \forall g_\delta \in L_2$$

Рассм. оператор R_α: $R_\alpha g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2 T(1 - \alpha n^2)} \sin nx$, $\alpha > 0$.

Это соответствует тому, что вместо задачи (2) рассм.
задача

$$(3)\begin{cases} v_\tau = -v_{xx} - \alpha v_{xxxx}, & 0<x<\pi,\ 0\le\tau\le T \\ v(0,\tau)=v(\pi,\tau)=0, & 0\le\tau\le T, \\ v_{xx}(0,\tau)=v_{xx}(\pi,\tau)=0 & 0\le\tau\le T, \\ v(x,0)=g(x) \end{cases}$$

Если решить эту задачу методом Фурье, получим (с.ф. $\sin nx$)

$$v(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2\tau-\alpha n^4\tau}\sin nx \quad \text{и} \quad v(x,T)=R_\alpha g$$

Докажем, $R_\alpha g_\delta$ дает прибл. решение, т.е. $\|R_\alpha g_\delta-\bar\varphi\|\to 0$ если $\alpha(\delta)\to$ при $\delta\to 0$, когда α согласовано с δ.

$$\|R_\alpha g_\delta-\bar\varphi\|\le\|R_\alpha g_\delta-R_\alpha\bar g+R_\alpha\bar g-\bar\varphi\|\le\underbrace{\|R_\alpha g_\delta-R_\alpha\bar g\|}_{1}+$$

$$+\underbrace{\|R_\alpha\bar g-\bar\varphi\|}_{2}$$

1 $\|R_\alpha g_\delta-R_\alpha\bar g\|\le\|R_\alpha\|\|g_\delta-\bar g\|\le\|R_\alpha\|\delta$.

$$\|R_\alpha g\|^2=\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2T(1-\alpha n^2)}\sin nx\Big\|^2=\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{2n^2T(1-\alpha n^2)}\|\sin nx\|^2\le$$

$$\le\max_{1\le n<\infty} e^{2n^2T(1-\alpha n^2)}\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2\|\sin nx\|^2=\|g\|^2\max_{n\ge1} e^{2n^2T(1-\alpha n^2)}$$

$$\max_{n\ge1} n^2T(1-\alpha n^2)=T\max_{n\ge1} n^2(1-\alpha n^2)\le T\max_{x\ge1}x(1-\alpha x)=\frac{T}{2\alpha}\Big(1-\frac12\Big)=\frac{T}{4\alpha}$$

$(x-\alpha x^2)'=0 \quad 1-2\alpha x_*=0, \quad x_*=\frac{1}{2\alpha}$ при $x_*=\frac{1}{2\alpha}$

$$\|R_\alpha g\|^2\le e^{\frac{T}{2\alpha}}\|g\|^2 \Rightarrow \|R_\alpha\|\le e^{\frac{T}{4\alpha}}$$

2 $$\|R_\alpha\bar g-\bar\varphi\|^2=\|R_\alpha K\bar\varphi-\bar\varphi\|^2=\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}(\bar\varphi_n e^{-\alpha n^4T}-\bar\varphi_n)\sin nx\Big\|^2=$$

$$K\bar\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\bar\varphi_n e^{-n^2T}\sin nx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-\alpha n^4T}-1)^2\bar\varphi_n^2\|\sin nx\|^2=\sum_{n=1}^{N(\varepsilon)}(1-e^{-\alpha n^4T})^2\bar\varphi_n^2\|\sin nx\|^2+\underbrace{\sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty}\dots}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$$

$\forall\varepsilon\ \exists N(\varepsilon)$: $\sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty}\bar\varphi_n^2\|\sin nx\|^2<\frac{\varepsilon}{2}$, т.к. ряд сходится. Фиксируем $N(\varepsilon)$.

Выбирая $\alpha(N)$ дост. малым, т.е. таким что $1-e^{-\alpha N(\varepsilon)T} \le \overline{\mu(\alpha)}$,

где $\mu^2(\alpha)\sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \overline{\varphi}_n^{\,2} \|\sin nx\|^2 \le \underbrace{\mu^2(\alpha)\ \|\overline{\varphi}\|^2}_{\gamma^2(\alpha)} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$\|R_\alpha g_\delta - \overline{\varphi}\| \le \|R_\alpha\|\delta + \|R_\alpha \overline{g} - \overline{\varphi}\| \le \delta e^{T/4\alpha} + \underbrace{\gamma(\alpha)}_{\to 0 \text{ при } \alpha\to 0}$$

<u>Теорема</u>. Если $\alpha(\delta)>0$, $\alpha(\delta)\to 0$, $\delta e^{T/4\alpha(\delta)} \to 0$ при $\delta\to 0$, то $\|R_{\alpha(\delta)} g_\delta - \overline{\varphi}\|_{L_2[0,\pi]} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Эту схему решения ОЗ можно распространить на исх. задачу с перем. коэффициентами от $(x_1,\dots,x_n)$

$u_t = \operatorname{div} k(x_1,\dots,x_n)\operatorname{grad} u \ \dots$